संगणक विज्ञान में प्रयुक्त अंक प्रणालियाँ : एक विवेचन

अमित कुमार शर्मा

भौतिक विज्ञान विभाग
ब्रह्मानन्द महाविद्यालय, राठ
हमीरपुर, उ०प्र०

भौतिक विज्ञान

में

पी-एच० डी०

उपाधि हेतु

बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय, झाँसी

को प्रस्तुत

शोध-प्रबन्ध की

शोध-प्रबन्ध

२००७

(Vedic Sciences Study Group)

Dr. Kailash
Reader & Head, Physics Department
Brahmanand Post-Graduate College,
Rath (Hamirpur) U. P. 210 431
Phone: 05280 - 220207
Mobile: 09415331748

प्रमाण पत्र
(Certificate)

प्रमाणित किया जाता है कि ***अमित कुमार शर्मा*** द्वारा अपना शोध–प्रबन्ध "संगणक विज्ञान में प्रयुक्त अंक प्रणालियाँ : एक विवेचन" बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय झांसी को भौतिक विज्ञान में पी–एच0 डी0 उपाधि हेतु प्रस्तुत है, जो मेरे निर्देशन में हुआ है।

प्रस्तुत शोध–प्रबन्ध सर्वदा मौलिक है तथा यह अब तक किसी अन्य विश्वविद्यालय में प्रस्तुत नहीं किया गया है। शोधार्थी ने मेरे निर्देशन में २०० दिन उपस्थित रहकर शोधकार्य पूर्ण किया है।

शोध–निदेशक

Kailash 10.12.07

(डॉ0 कैलाश)

धन्यवादज्ञापन
(Acknowledgement)

पी–एच0 डी0 उपाधि हेतु इस शोध –प्रबन्ध को मैं माँ सरस्वती जी के श्रीचरणों में सादर समर्पित करता हूँ। प्रस्तुत शोध –प्रबन्ध लगभग पाँच वर्षो के अथक प्रयास से तैयार किया गया है, इसके महत्वपूर्ण कार्य हेतु ***डॉ कैलाश,*** अध्यक्ष, भौतिक विज्ञान विभाग, ब्रह्मानन्द महाविद्यालय राठ, से मुझको विविध प्रकार से प्रेरणा, प्रोत्साहन, स्नेह एवं पांडित्यपूर्ण निर्देशन प्राप्त हुआ है, एतदर्थ मैं आपके प्रति विनयावनत हूँ।

ब्रह्मानन्द महाविद्यालय राठ के प्राचार्य ***डॉ एल0 एन0 अग्रवाल*** के प्रति हृदय से आभार व्यक्त करता हूँ। जिन्होंने महाविद्यालय में पुस्तकालय एवं संगणक प्रयोगशाला की सुविधा प्रदान करके अमूल्य सहयोग किया है। इसी महाविद्यालय के ***डॉ एस0 सी0 शर्मा,*** अध्यक्ष, अंग्रेजी विभाग, ***डॉ फूल सिंह,*** अध्यक्ष, हिन्दी विभाग एवं ***श्री हल्के प्रसाद,*** अध्य्रक्ष, गणित विभाग के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने समय –समय पर बहुमूल्य सुझाव दिए हैं। अपने साथियों ***श्री कृष्णमूर्ति राजू, श्री लालता प्रसाद,, श्री सुधांशु सिंह राय, श्री वीरेन्द्र कुमार,, कु0 पूर्णिमा खरे, श्रीमती पूनम यादव*** एवं ***श्रीमती प्रियंका मिश्रा*** को भी धन्यवाद देता हूँ, जिन्होंने सब प्रकार का सहयोग किया है। ***श्री खेमचन्द्र*** एवं ***श्री मंगल सिंह,*** भौतिक विज्ञान विभाग का मैं अत्यधिक आभारी हूँ, जिन्होने शोध कार्य हेतु प्रयोगशाला में सहयोग दिया है।

पूज्य ***माताजी*** एवं ***पिताजी*** के श्रीचरणों में श्रद्धानत हूँ जिन्होंने निरन्तर आर्थिक कठिनाइयों से जूझते हुए भी मुझको इस हेतु सदैव प्रेरित किया है। इसके साथ ही मैं अपने ***अग्रज, दीदी*** का भी ऋणी हूँ, जिन्होंने इस कार्य हेतु हमेशा प्रोत्साहित किया।

श्री हरिशरण विश्वकर्मा, अमन कम्प्यूटर्स एवं ***श्री चन्द्रप्रकाश चौरसिया*** को मैं साधुवाद देता हूँ, जिन्होंने टंकण कार्य को समय से पूर्ण किया है।

अन्त में मैं ***डॉ एस0 के0 श्रीवास्तव,*** भौतिक विज्ञान विभाग, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय, झाँसी, के प्रति मैं अपनी कृतज्ञता ज्ञापित करता हूँ जिन्होंने इस महत्वपूर्ण कार्य के लिए अद्वितीय सहयोग दिया है। इसके अतिरिक्त मुझे शोध अवधि में जिन आत्मीय जनों से प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रुप से जो भी न्यूनाधिक सहायता मिली है, आप सबका भी मैं अन्तःकरण से आभारी हूँ।

Amit Kumar Sharma

दिसम्बर 09, 2007 — ***(अमित कुमार शर्मा)***

प्राक्कथन
(Preface)

भारतीय साहित्य में गणित एवं विज्ञान के अनेक ग्रन्थ उपलब्ध हैं, इन ग्रन्थों में हमारे मनीषियों ने गणित एवं विज्ञान के मूल सिद्धान्तों की स्थापना एवं विवेचना करते हुए अपनी उत्कृष्ट प्रतिभा का परिचय दिया है। विगत दशक में संगणक विज्ञान के क्षेत्र में सभी स्रोतों द्वारा पर्याप्त प्रयास किए गये हैं। इस दशक का शुभारम्भ सूचना प्रोद्योगिकी की धमक के साथ हुआ है। इहलौकिक एवं पारलौकिक ज्ञान के आदि एवं अनन्त स्रोत वेद हैं। 'वेद' का भावार्थ है 'अनन्त ज्ञान विज्ञान का अक्षय भण्डार'। जिस देश के ऋषियों का गणित श्रेष्ठ होता है, उस राष्ट्र का विज्ञान भी सर्वोत्कृष्ट होता है, यह सर्वमान्य एवं अकाट्य तथ्य है। ज्ञान विज्ञान के मेरूदण्ड 'गणित' का सम्यक् विचार **अध्याय एक (क)** में **'वेदों में गणित'** शीर्षक में किया किया गया है। विविध प्रकरणों यथा शून्य, अंक, दशगुणोत्तरी संख्या, क्रमागत संख्या, भिन्नात्मक संख्या, अनन्त के अंतर्गत वेदों में उपलब्ध गणितीय ज्ञान को प्रकाश में लाया गया है। **अध्याय एक (ख) 'भारतीय काल गणना का वैज्ञानिक स्वरुप'** में पाश्चात्य कालगणना की अवैज्ञानिकता एवं भारतीय कालगणना की वैज्ञानिकता की व्याख्या की गई है। मानव आदि काल से ही अपनी भावनाओं एवं विचारों को संकेतों एवं भाषा के द्वारा अभिव्यक्त करता रहा है। गोपनीय संकेत सम्प्रेषित करने के लिये विभिन्न शब्दावली का प्रयोग कूट भाषा कहलाती है। देवनागरी लिपि के अक्षरों का उपयोग करते हुये अंकों एवं संख्याओं को व्यक्त करना कूटांक कहलाता है। शब्दों को अंकों एवं संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "शब्द कूटांक" कहलाता है। देवनागरी लिपि के व्यंजनों को अंकों के रूप में एवं व्यंजनों एवं स्वरों से निर्मित शब्दों को संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "व्यंजन कूटांक" कहना उचित है। देवनागरी लिपि के अक्षरों, अकार रहित व्यंजनों को अंकों एवं संख्याओं के रूप में तथा स्वरों को दशघातीय संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "वर्ण कूटांक" कहना श्रेयस्कर है। **'प्राचीन भारतीय वाङ्मय में कूटांक'** की **अध्याय एक (ग)** में विवेचना की गई है। भिन्नात्मक राशि के प्रयोग से बचने के लिये सभी सभ्य देशों में लम्बाई, तौल और मुद्रा आदि की इकाईयों को छोटी इकाईयों में विभाजित करने की सामान्य प्रथा है। इससे वाणिज्य की प्रगति तथा वाणिज्य संबंधी गणित की उत्पत्ति का पता चलता है। भारत में नाप और तौल की पद्धतियों का प्रयोग प्राचीन काल से हो रहा है। भिन्न–भिन्न ग्रन्थों में वर्णित माप और तौल की इकाईयाँ एक दूसरे से भिन्न हैं। ये वे इकाईयाँ हैं जो ग्रन्थ रचे जाने के समय उस स्थान में प्रचलित थीं जहाँ ग्रन्थ लिखा गया था। शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के तथ्य भी मिलते हैं। **अध्याय एक (घ)** में **'मापन पद्धतियाँ एवं द्विअंकीय प्रणाली के साक्ष्य'** की व्याख्या की गयी है। वैदिक

काल से लेकर वर्तमान तक हमारे ऋषियों ने अनेक उल्लेखनीय कार्य किए हैं। छोटे–छोटे सूत्रों द्वारा गणित एवं विज्ञान की जटिल समस्याओं का मौखिक समाधान प्रस्तुत किया है। गोवर्धन मठ के जगदगुरु शंकराचार्य भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज ने वैदिक गणित सोलह सूत्रों एवं तेरह उपसूत्रों द्वारा गणित की जटिल समस्याओं का समाधान प्रस्तुत किया है, इन सूत्रों एवं उपसूत्रों का उपयोग संगणक विज्ञान में प्रयुक्त अंक प्रणालियों यथा द्विअंकीय, चतुष्अंकीय,अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय में; मौलिक संकियाओं (योग, अन्तर, गुणन, भाजन, घात, मूल, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव आदि) में किया जा सकता है। **अध्याय दो** में प्रस्तुत कार्य में प्रयुक्त पारिभाषिक शब्दों को **'पारिभाषिक शब्दावली'** नामक अध्याय में दिया गया है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों ''निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत् एवं विलोकनम्'' का उपयोग इस अध्याय में किया गया है। **'मौलिक संकियायें'** (योग एवं अन्तर) की **अध्याय तीन** में विभिन्न अंक प्रणालियों में वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों ''निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत् एवं विलोकनम्'' का उपयोग करते हुए 7 उदाहरण देकर विवेचना की गयी है। ''निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, विलोकनम् एवं आनुरूप्येण'' सूत्रों एवं उपसूत्रों का उपयोग **अध्याय चार 'गुणन'** में समान आधार वाली संख्या दो, तीन, चार एवं पांच संख्याओं के गुणन, समान उपाधार संख्या वाली दो, तीन, चार एवं पांच संख्याओं के गुणन, तथा भिन्न आधार अथवा उपाधार संख्या वाली दो एवं तीन संख्याओं के गुणन को विभिन्न अंक प्रणालियों में 12 उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है। जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का एक या एक से अधिक बार गुणा किया जाता है, तो उस संख्या की घात संख्यायें प्राप्त होती हैं। ''निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्' एवं आनुरूप्येण'' सूत्रों एवं उपसूत्रों का उपयोग, **अध्याय पाँच 'संख्याओं की घातें'** (वर्ग, घन, चतुर्थघात एवं पंचमघात) को विभिन्न अंक प्रणालियों में 15 उदाहरणों सहित समझाया गया है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों ''निखिलं नवतः चरमं दशतः, परावर्त्य योजयेत्, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं विलोकनम्'' का उपयोग करते हुये **'भाग'** को अध्याय **छः** में 2 उदाहरण देकर वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता को स्पष्ट किया गया है। **अध्याय सात** में **'संख्याओं के मूल'** (वर्गमूल, घनमूल, चतुर्थमूल एवं पंचममूल) को विभिन्न अंक प्रणालियों में 'विलोकनम् विधि' के द्वारा वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों ''एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, विलोकनम् एवं आनुरुप्येण'' के द्वारा 13 उदाहरणों सहित व्याख्या की गई है। दाशमिक प्रणाली में 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 एवं 11 की विभाजनीयता को संख्या को देखकर ही समझा जा सकता है, परन्तु अन्य संख्याओं की

अनुक्रमणिका
(Contents)

अध्याय एक (क)

वेदों में गणित
(Mathematics in Vedas)

प्रकाशन (Publication)

- वेदों में गणित, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, फरवरी 07, पृ0 54–56।

1.क.1 प्रस्तावना (Introduction)

1.क.2 शून्य (Zero)

1.क.3 अंक (Digit)

1.क.4 दशगुणोत्तरी संख्या (Number Multiple of Ten)

1.क.5 क्रमागत संख्या (Successive Number)

1.क.6 भिन्नात्मक संख्या (Fractional Number)

1.क.7 अनन्त (Infinity)

1.क.8 निष्कर्ष (Conclusion)

1.क.9 संदर्भ ग्रन्थ (References)

1.क.1 प्रस्तावना (Introduction) :

इहलौकिक एवं पारलौकिक ज्ञान के आदि एवं अनन्त स्रोत वेद हैं। 'वेद' का भावार्थ है 'अनन्त ज्ञान विज्ञान का अक्षय भण्डार'। यह व्युत्पत्ति दर्शाती है कि प्राणिमात्र के सर्वतोन्मुखी विकास हेतु जिस भी ज्ञान की आवश्यकता है, वह सब पूर्णरूपेण वेदों में उपलब्ध है। वेदों में शरीर रचना विज्ञान, आरोग्य शास्त्र, शल्य चिकित्सा विज्ञान, धनुर्विज्ञान, सैन्य विज्ञान, संगीत शास्त्र, अभियांत्रिकी एवं स्थापत्य कला आदि के प्रचुर प्रमाण प्राप्त होते हैं। प्रत्येक शास्त्र का उद्देश्य है: व्यष्टि सत्ता का उत्तरोत्तर विकास कर, समष्टि का चिन्तन करते हुये सृष्टि का रक्षा कवच बन परमेष्टि का साक्षात्कार। प्रत्येक विज्ञान की मेरूदण्ड है गणित। जिस भी शास्त्र का विचार करेंगे, वह गणितीय विश्लेषण की आधारभूमि पर प्रतिस्थापित है।

प्रस्तुत शोध में ज्ञान विज्ञान के मेरूदण्ड 'गणित' का सम्यक् विचार किया गया है। जिस देश के ऋषियों का गणित श्रेष्ठ होता है, उस राष्ट्र का विज्ञान भी सर्वोत्कृष्ट होता है, यह सर्वमान्य एवं अकाट्य तथ्य है। विविध प्रकरणों यथा – शून्य, अंक, दशगुणोत्तरी संख्या, क्रमागत संख्या, भिन्नात्मक संख्या एवं अनन्त के अंतर्गत वेदों में उपलब्ध गणितीय ज्ञान को प्रकाश में लाया गया है।

1.क.2 शून्य (Zero) :

'यजुर्वेद' में कहा {1} गया है कि – 'ऊँ खं ब्रह्म'। (यजुर्वेद/अध्याय 40/कण्डिका 17) इस ऋचा का भावार्थ है कि प्रणवाक्षर ऊँ एवं खं दोनों ही ब्रह्म वाचक हैं। खं का अर्थ अन्तरिक्ष एवं शून्य(0) भी होता है। ज्योतिषादि ग्रन्थों में खं एवं इसके पर्याय शब्दों को शून्य(0) अर्थो में प्रयुक्त किया जाता है। इस ऋचा में शून्य(0) के अद्यतन ज्ञात प्रगुणों (शून्य संबंधी अनिर्णीत एवं सतत समीकरण आदि) को ही सारगर्भित ढंग से अभिव्यक्त किया गया है। इसका विस्तृत विचार करने पर सुस्पष्ट होता है कि शून्य(0) (अन्तरिक्ष अथवा ब्रह्म) से मिलकर (जुड़कर या योग (+) कर) सभी (अंकों या प्राणियों) की सृष्टि हुई है। इसीलिये ब्रह्म को सृष्टि का रचयिता कहा गया है अर्थात् इससे 'योग' (+, जोड़ना) की संकल्पना स्पष्ट परिलक्षित होती है। 'योग'(+) के व्युत्क्रम संक्रिया का विचार करने पर 'अन्तर' (घटाना) (–) की संकल्पना का प्रादुर्भाव होता है। तात्पर्य यह है कि जोड़ने (+) एवं घटाने (–) की गणित की मूल संक्रियांओं को इस ऋचा में प्रकट किया गया है।

'अथर्ववेद' {2} में शून्य(0) संबंधी अधोलिखित ऋचायें भी प्राप्त होती हैं :–

'खे रथस्य खे खेऽनसः युगस्य शतक्रतो'। (अथर्ववेद/खण्ड 14/सूक्त 1/मंत्र 41)

उत्तिष्ठेत किमिच्छन्तीदमानां अहं त्वेडे अभिभू स्वात् गृहात् (सावित्री सूर्या)

'शून्येषी निर्ऋते याजगन्धेत्तिष्ठाराते प्र धत मेह रंस्था।।(अथर्ववेद / काण्ड 14 / सूक्त 2 / मंत्र 19)

'ऊँ क्षुद्रेभ्यः स्वाहा ।। (अथर्ववेद / काण्ड 19 / सूक्त 22 / मंत्र 6)

इन ऋचाओं में ख शून्य एवं क्षुद्र को समान अर्थ में प्रयुक्त किया गया है।

1.क.3 अंक (Digit) :

शून्य(0) का विश्लेषणात्मक विवेचन ऊपर किया जा चुका है। सभी अंकों के विषय में 'अथर्ववेद' में कहा है कि –

कीर्तिश्च यशच्चाम्भश्च नभश्च ब्राह्मणवर्चसं चान्नं चान्माद्यं च । य एतं देवमेकवृतं वेद।।

न द्वितीयो(2) न तृतीयश्चतुर्थो (3 एवं 4)नाप्युच्यते। न पंचमा(5) न षष्ठः(6) सप्तमो(7) नाप्युच्यते।।

न अष्टमो(8) न नवमो(9) दशमो(10) नाप्युच्यते। स सर्वस्यै वि पश्यति यच्च् प्राणति यच्च न।।

तिमिरं निगतं सहः स एष एक(1) एकवृदेक एव। सर्व अस्मिन् देवा एकवृतो भवन्ति।।14–21।।

(अथर्ववेद / काण्ड 13 / सूक्त 5)

इन ऋचाओं का विश्लेषण करने पर सुविदित होता है कि परमपिता परमेश्वर एकमेव है, उससे भिन्न दूसरा(2), तीसरा(3), चौथा(4), पांचवाँ(5), छठवाँ(6), सातवाँ(7), आठवाँ(8), नवाँ(9) एवं दशवाँ (10) ईश्वर नहीं है। किन्तु वह सदा सर्वदा एकमेव, अद्वितीय एवं अप्रमेय है। सभी देवता इसमें एकरूप होते हैं। इनसे सुस्पष्ट है कि अंकों की उत्पत्ति शून्य(0) से मिलकर एक(1) से होती है अर्थात् शून्य(ब्रह्म) से अंकों(सृष्टि) की रचना एक(एकमेव अगोचर परमपिता परमात्मा) से होती है। अतः एक(1)(परमात्मा) सभी में (शून्य(0) में भी) समाहित (गुणन(×)) है अर्थात् एक(1) से 'गुणन'(×) की संकल्पना का आविर्भाव होता है। 'गुणन' संकिया का व्युत्क्रम विचार करने पर 'भाग' संक्रिया स्वतः उद्भूत होती है। दाशमिक प्रणाली में अंक शून्य(0) से लेकर नौ(9) तक होते हैं, जिनको इन ऋचाओं में प्रदर्शित किया गया है। दश(10) यह इस संख्या प्रणाली अर्थात दाशमिक प्रणाली का आधार है।

1.क.4 दशगुणोत्तरी संख्या (Number Multiple of Ten) :

दश गुणोत्तरी संख्याओं को संबोधित करते हुये 'यजुर्वेद' में कहा गया है कि–

'एका(1) च दश(10) च, दश(10) च शतम(10^2) च, शतम्(10^2) च सहस्त्रम(10^3) च् सहस्त्रम्(10^3) च अयुतम्(10^4) च, अयुतम्(10^4)च नियुतम्(10^5)च, नियुतम्(10^5) च प्रयुतम्(10^6) च, अर्बुदं(10^8) च, न्यूर्बुदं च,समुद्रश्च, मध्यम्(10^{16}) च, अन्तश्च, परार्द्धश्च्(10^{17}) एताः मे अग्ने इष्टिकाः धेनवः सन्तु, अमुत्रामुष्मिन् लोके। (यजुर्वेद / अध्याय 17 / कण्डिका 2)

इस ऋचा का तात्पर्य है कि 'हे विद्वान पुरूष, जैसे मेरी ये इष्ट सुख देने वाली यज्ञ समिधा, दुग्ध देने वाली गौओं के तुल्य हों, वैसी ही आपके लिये भी हों। एक(1), दश(10), शत्,(10^2) सहस्त्र(10^3), दश सहस्त्र(10^4), लक्ष(10^5), दश लक्ष(10^6), करोड(10^7), दश करोड(10^8), अरब(10^9), दश अरब(10^{10}), खरब(10^{11}), दश खरब(10^{12}), नील(10^{13}), दश नील(10^{14}), पद्म(10^{15}), दश पद्म(10^{16}) एवं शंख(10^{17}) ईटें पुर्नजन्म में हों।' इस विवेचन से स्पष्ट है कि संख्या के प्रत्येक अंक का स्थानानुसार विशिष्ट मान भी होता है। शास्त्रों में व्युत्क्रम दशुगुणोत्तरी संख्या यथा लक्षांश(1/100000), सहस्त्रांश(1/1000), शतांश(1/100), दशांश(1/10) आदि शब्दावली भी प्रयोग में लायी गयी है, जिससे 'दशमलव' की परिकल्पना वैदिक युग से ही परिलक्षित होती है।

समस्त अंकों की दशगुणोत्तरी संख्याओं की चर्चा करते हुये 'अथर्ववेद' में कहा गया है कि–
एका(1) च मे दश(10) च मेपवक्तार औषधे।। द्वे(2) च मे विशंतिश्च(20) मेपवक्तार औषधे।।
तिस्त्रश्य(3) मे त्रिंशच्च(30) मेपवक्तार औषधे। चतस्त्रश्च(4) मे चत्वारिंशच्च(40) मेपवक्तार औषधे।।
पंच(5) च मे पंचाशच्च(50) मेपवक्तार औषधे। षट्(6) च मे षष्टिश्च(60) मेपवक्तार औषधे।।
सप्त(7) च मे सप्ततिश्च(70) मेपवक्तार औषधे। अष्ट(8) च मेऽ शीतिश्च(80) मेपवक्तार औषधे।।
नव(9) च मे नवतिश्च(90) मेपवक्तार औषधे। दश(10) च मे शतं(100) च मेपवक्तार औषधे।।
शतं(100) च मे सहस्त्रं(1000) च मेपवक्तार औषधे। ऋतजात ऋतावरि मधु मे मधुला करः।।

(अथर्ववेद/काण्ड 5/सूक्त 15/मंत्र 1–11)

'अथर्ववेद' में ही कहा गया है कि –
पंच(5) या पंचाशच्च(50) संयन्ति मन्या अभि। सप्त(7) च या *सप्ततिश्च*(70) संयन्ति ग्रेव्या अभि।।
नव(9) च या नवतिश्च(90) संयन्ति स्कन्धा अभि।। इतस्ताः सर्वा नश्यन्तु बाका अपचितामिव।।

(अथर्ववेद/काण्ड 6/सूक्त 25/मंत्र 1–3)

'ऋग्वेद' {3–4} में कहा गया है कि :–

आ विशंत्या(20) त्रिशंता(30) याह्यर्वाड़ा चत्वारिंशता(40) हरिभिर्युजानः।
आ पंचाशता(50) सुरथेभिरिन्द्राऽऽ षष्ट्या(60) सप्तत्या(70) सोमपेयम्।।
आशीत्या(80) नवत्या(90) याह्यर्वाड़ा शतेन(100) हरिभिरूह्यमानः।
इयं हिते शुन्होत्रेधु सोम इन्द्र त्वाया परिषिक्तो मदाया।।

(ऋग्वेद/मण्डल–2/सूक्त 18/मंत्र 5–6)

किसी अंक की दश गुणोत्तरी संख्याओं के विषय में 'अथर्ववेद' में कहा गया है कि –
गन्धर्वा एनमन्वायन् त्रयास्त्रिंशतः(33), त्रिशताः(300) षटसहस्त्राः(600)। सर्वान्त्स देवांस्तपसा विपर्ति।।

(अथर्ववेद/काण्ड–11/सूक्त 5/मंत्र 2)

1.क.5 क्रमागत संख्या (Successive Number) :

एक(1) से एकादश(11) तक की क्रमागत संख्याओं के विषय में 'अथर्ववेद' में उल्लेख है कि–

यद्येकवृषोऽसि(1) सृजारसोऽसि।। यदि द्विवृषोऽसि(2) सृजारसोऽसि।।
यदि त्रिवृषोऽसि(3) सृजारसोऽसि।। यदि चर्तुवृषोऽसि(4) सृजारसोऽसि।।
यदि पंचवृषोऽसि(5) सृजारसोऽसि।। यदि षड्वृषोऽसि(6) सृजारसोऽसि।।
यदि सप्तवृषोऽसि(7) सृजारसोऽसि।। यदि अष्टवृषोऽसि(8) सृजारसोऽसि।।
यदि नववृषोऽसि(9)सृजारसोऽसि।। यदि दशवृषोऽसि(10) सृजारसोऽसि।।
यदि एकादशोऽसि(11) सोऽपोदकोऽसि।। (अथर्ववेद/काण्ड–5/सूक्त 16/मंत्र 1–11)

'यजुर्वेद' में एक(1) से सप्तदश(17) तक की क्रमागत संख्याओं की चर्चा करते हुये सृष्टि के प्रत्येक घटना चक्र पर विजय का वर्णन करते हुये कहा है कि:–

अग्निः एकाक्षरेण(1) प्राणं उदजयत् तं उज्जेषम्।
अश्विनो द्विअक्षरेण (2) द्विपदः मनुष्यान् उदजयताम तान् उज्जेषम्।।
विष्णुः त्रिअक्षरेण(3) तीन् लोकान् उदजयत् तान् उज्जेषम।
सोमः चतुरक्षरेण(4) चतुष्पदः पशून् उदजयत् तान् उज्जेषम।।
पूषा पंचाक्षरेण(5) पंचदिशः उदजयत ताः उज्जेषम।।
सविता शडक्षरेण (6) शडऋतून उदजयत् तान् उज्जेषम।।
मरूतः सप्ताक्षरेण(7) सप्त ग्राम्यान् उदजयत् तान् उज्जेषम।।
वृहस्पति अष्टाक्षरेण(8) गायत्रीम् उदजयत् तान् उज्जेषम।।
मित्रः नवाक्षरेण(9) त्रिवृत्तम् उदजयत् तं उज्जेषम।।
वरूणः दशाक्षरेण(10) विराजम् उदजयत् तं उज्जेषम।।
इन्द्रः एकादशाक्षरेण(11) त्रिष्टुभम् उदजयत् ताम् उज्जेषम।।
विश्वेदेवाः द्वादशाक्षरेण(12) जगतीम् उदजयत् ताम् उज्जेषम।।
वसवः त्रयोदशाक्षरेण(13) त्रयोदशम् स्तोमम् उदजयत् तम् उज्जेषम।।
रूद्राः चतुर्दशाक्षरेण(14) चतुर्दशम् स्तोमम् उदजयत् तम् उज्जेषम।।
आदित्याः पंचदशाक्षरेण(15) पंचदश स्तोमम् उदजयत् तम् उज्जेषम।।
अदितिः षोडशाक्षरेण(16) षोडशं स्तोमम उदजयत् तम् उज्जेषम।।
प्रजापतिः सप्तदशाक्षरेण(17) सप्तदशम् स्तोतम् उदजयत् तम् उज्जेषम।।

(यजुर्वेद/अध्याय 9/कण्डिका 31–34)

शून्य(0) से विंशति(20) तक की क्रमागत संख्याओं का विचार 'अथर्ववेद' में किया गया है। यथा– क्षुद्रेभ्यः(0) स्वाहाः।। प्रथमेभ्यः (1) शंखेभ्यः स्वाहा।।

द्वितीयेभ्यः (2)शंखेभ्यः स्वाहा।। तृतीयेभ्यः (3) शंखेभ्यः स्वाहा।।

आथर्वाणां चतुर्ऋर्चेभ्यः(4) स्वाहा।। पंर्चेभ्यः(5) स्वाहा।।

षड्(6) ऋर्चेभ्यः स्वाहा।। सप्तर्चेभ्यः(7) स्वाहा।।

अष्टर्चेभ्यः(8) स्वाहा।। नवर्चेभ्यः(9) स्वाहा।।

दशर्चेभ्यः (10)स्वाहा।। एकादशर्चेभ्यः(11) स्वाहा।।

द्वादशर्चेभ्यः(12) स्वाहा।। त्रयोदशर्चेभ्यः(13)स्वाहा।।

चतुर्दशर्चेभ्यः(14) स्वाहा।। पंचदशर्चेभ्यः(15) स्वाहा।।

षोड्शर्चेभ्यः(16) स्वाहा।। सप्तदशर्चेभ्यः(17) स्वाहा।।

अष्टादशर्चेभ्यः(18) स्वाहा।। एकोनविंशति(19) स्वाहाः।। विंशति(20) स्वाहा।।

(अथर्ववेद / काण्ड 19 / सूक्त 22 / मंत्र 6,8–10 एवं सूक्त 23 / मंत्र 1–17)

क्रमागत विषम संख्याओं की चर्चा करते हुये 'यजुर्वेद' में कहा गया है कि–

एका(1) च मे त्रिस्त्रश्च(3) मे, त्रिस्त्रश्च(3) मे पंच(5) च मे, पंच(5) च मे सप्त(7) च मे, सप्त(7) च मे नव(9) च मे। नव(9) च मे, एकादश(11) च मे, एकादश(11) च मे, त्रयोदश(13)च मे, त्रयोदश(13) च मे, पंचदश(15) च मे, पंचदश(15) च मे, सप्तदश(17) च मे। सप्त दश(17) च मे, नवदश(19) च मे, नवदश(19) च मे, एकविंशतिश्य(21) च मे, एकविंशतिश्च(21) मे त्रयोविंशतिश्च(23) मे, त्रयोविंशतिश्च(23) मे पंचविंशतिश्च(25) मे। पंचविंशतिश्च(25) मे सप्तविंशतिश्च(27) मे, सप्तविंशतिश्च(27) मे, नवविंशतिश्च(29) मे, नवविंशतिश्च(29) मे एकत्रिंशश्च(31) मे, एकत्रिंश्च(31) मे त्रयतिशच्च(33) मे, यज्ञेन कल्पन्ताम् ।।

(यजुर्वेद / अध्याय 18 / कण्डिका 24)

इस ऋचा का भावार्थ है कि 'यज्ञ से या मिलाने से या जोड़ने से एक(1), तीन(3), पांच(5), सात(7), नव(9), एकादश(11), त्रयोदश(13), पंचदश(15), सप्तदश(17), नवदश(19), एकविंशति(21), त्रयोविंशति(23), पंचविंशति(25), सप्तविंशति(27), नवविंशति(29), एकत्रिंशत(31), त्रयत्रिंशत(33) आदि की कल्पना करने में समर्थ हों'।

सम संख्याओं की चर्चा करते हुए 'यजुर्वेद' में सुस्पष्ट किया गया है कि –

चतस्त्रश्च(4) मे अष्टो(8) च मे, अष्टौ (8) च मे द्वादश (12) च मे, द्वादश(12) च मे षोडश(16) च मे, षोडश(16) च मे विंशतिः(20) च मे। विंशतिश्च(20)मे चर्तुविंशतिश्च(24)मे, चतुर्विंशतिश्च(24) मे अष्टाविंशतिश्च(28)मे, अष्टाविंशतिश्च(28)मे द्वात्रिंशच्च(32) मे, द्वात्रिंशच्च(32) मे षटत्रिंशच्च(36) मे

षटत्रिंशच्च(36) मे चत्वारिंशच्च(40) मे, चत्वारिंशच्च(40) मे चतुष्चत्वारिंशच्च(44) मे,

चतुष्चत्वारिंशच्च (44)मे अष्टाचत्वारिंशच्च(48) मे, यज्ञेन कल्पन्ताम्।।

(यजुर्वेद / अध्याय 18 / कण्डिका 25)

इसका अभिप्राय है कि 'यज्ञ से या मिलाने ये या जोड़ने(+) से चार(4), आठ(8), द्वादश(12), षोडश(16), विंशति(20), चतुर्विंशति(24), अष्टाविंशति(28), द्वात्रिंशत(32), षटविंशत(36), चत्वारिंशत(40), चतुष्चत्वारिंशत(44), अष्टाचत्वारिंशत(48) आदि की कल्पना करने में समर्थ हों।

यजुर्वेद की उपर्युक्त दोनों ऋचाओं से गणित की मूल संकल्पनाओं का विधिवत ज्ञान प्राप्त होता है। इनसे अंकगणित, बीजगणित एवं ज्यामिति तथा इनसे संबंधित गणित शास्त्र की प्रत्येक शाखा प्रशाखा की संकल्पना सुस्पष्ट होती है।

1.क.6 भिन्नात्मक संख्या (Fractional Number) :

किसी राशि के एक से अधिक अंश करने के लिये 'ऋग्वेद' में कहा गया है कि–

ज्येष्ठ आह चमसा द्वा(1/2) करोति कनीयान् त्रीन्(1/3) कृणवामेत्याह।

कनिष्ठ आह चतुरस्करोति(1/4) त्वष्ट ऋभवस्तत् पनयद् वचो वः।।

(ऋग्वेद / मण्डल 4 / सूक्त 33 / मंत्र 5)

इसका अभिप्राय है कि अग्रज बोला कि हम चमस के दो भाग(1/2) करें, मध्यज ने कहा कि हम तीन भाग(1/3) करें एवं अनुज ने सुझाया हम चार भाग(1/4) करें। यह देखकर त्वष्टा ने सबकी प्रशंसा की।

इसी प्रकार 'अथर्ववेद' में कहा है कि –

एकपाद(1) द्विपदो (2) भूयो वि चक्रमे द्विपात्(2) त्रिपाद(3) मभ्येति पश्चात।

चतुष्पाच्चक्रे(4) संपश्यन् पंक्तिगुपतिष्ठमानः तस्य देवस्य।।

(अथर्ववेद / काण्ड 13 सूक्त 3 / मंत्र 25)

एक से सहस्त्र भाग करने के संदर्भ में 'ऋग्वेद' में कहा है कि :–

गौरीर्मिमाय सलिलानि तक्ष त्येकपदी (1) द्विपदी(2) सा चतुष्पदी(4) ।

अष्टापदी (8) नवपदी(9) वभूवुषी सहस्त्राक्षरा(1000) परमे व्योपन्।।

(ऋग्वेद / मण्डल 1 / सूक्त 164 / मंत्र 41)

इसका भावार्थ है कि 'गो' (वाक्) निश्चय से एक, दो, चार, आठ अथवा नौ पदों वाले छन्दों में विभक्त हुई, यह अनेक प्रकार की है, हजार अक्षरों तक इसकी सीमा है। वह संपूर्ण अन्तरिक्ष में समव्याप्त है।

अथर्ववेद/10/8/7/ एवं भर्गवोवैरर्भिः (11/44/22) में अर्द्ध शब्द भी प्रयुक्त किया गया है।

1.क.7 अनन्त (Infinity) :

अनन्त की विस्तृत विवेचना करते हुये 'यजुर्वेद' में उल्लेख आता है कि–

ऊँ पूर्णमदः पूर्णमिदं पूर्णात् पूर्णमुदच्यते। पूर्णस्य पूर्णमादाय पूर्णमेवावशिष्यते।।

(यजुर्वेद/अध्याय 17/कण्डिका 3)

इस ऋचा का अर्थ है कि वह सच्चिदानन्द परब्रह्म परमात्मा सब प्रकार से पूर्ण(∞) है। यह जगत भी उस परब्रह्म से ही पूर्ण(∞) है, क्योंकि पूर्ण(∞) से ही पूर्ण(∞) की उत्पत्ति होती है। पूर्ण (∞) से पूर्ण (∞) को निकालने पर अवशेष पूर्ण(∞) ही होता है। इस ऋचा में गणित शास्त्र में अद्यतन ज्ञात अनन्त(∞) के प्रगुणों को ही अभिव्यक्त किया गया है।

इसी प्रकार 'अथर्ववेद' में कहा गया है कि–

पूर्णात् पूर्णम् उद्चति पूर्ण पूर्णेन सिच्यते। उतो तदद्य विद्याम् यतः तत् परिषिच्यते।।

(अथर्ववेद/काण्ड 10/सूक्त 8/मंत्र 29)

इस ऋचा का भाव है कि पूर्ण(∞) से पूर्ण(∞) उत्पन्न होता है, पूर्ण(∞) से पूर्ण(∞) सिंचित होता है। हम उसको जानने का सत्प्रयत्न करें जिस पूर्ण से अभिसिंचित होता है।

1.क.8 निष्कर्ष (Conclusion) :

उपर्युक्त प्रकरणों में विविध प्रकार की संख्याओं को वेदों से उद्धृत किया गया है। इन संख्याओं का उपयोग वेदों में वामतः, दक्षिणतः, योग, गुणन, भिन्न आदि रूपों में प्रचुर मात्रा में वैज्ञानिक तथ्यों की पुष्टि {5–8} के लिये किया गया है। यथा–

षष्टि(60) सहस्त्र(1000) ाश्व्यस्यायुतासनम उष्ट्रानां विंशति(20) शता(100) ।
दश (10) श्यावीनां शता(100) दश(10) त्रय(3)रूषीणां दश(10) गवां सहस्त्रा(1000) ।।

(ऋग्वेद/मण्डल 8/सूक्त 46/मंत्र 22)

महे चन त्वामद्रिवः परा शुल्काय देयाम्।
न सहस्त्राय (1000) नायुताय (10^4) वज्रिवो न शताय (100) शतामघ(100) ।।

(ऋग्वेद/मण्डल 8/सूक्त 1/मंत्र–5)

नि गव्ययोऽनयो द्रुह्यवश्च षष्टिः(60) शता (100) सुषुपुः षट्(6) सहस्त्रा(1000) ।
षष्टि(60) वीरासो अधि षड्(6) दुवोयु विश्वेदिन्द्रस्य वीर्या कृतानि।।

(ऋग्वेद/मण्डल 7/सूक्त 18/मंत्र 14)

एकं (1) च विंशति(20) च श्रवस्या वैकर्णयोर्जनान् राजा न्यस्तः।
दस्यो न सद्मन नि शिंशाति बर्हिः शूरः सर्गमकृणोदिन्द्र एषाम् ।।

(ऋग्वेद / मण्डल 7 / सूक्त 18 / मंत्र 11)

द्वादश(12) प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि(3) नभ्यानि क उ तच्चिकेत्।
तत्राहतास्त्रीणि(3) शतानि(100) शंकवः षष्टि(60)श्चखीला अविचाचला ये।।

(अथर्ववेद / काण्ड 10 / सूक्त 8 / मंत्र 4)

त्वमेतांजनराज्ञो द्विर्दशा(12) ऽबन्धुना सुश्रवसोयजग्मुषः।
षष्टिं(60) संहस्त्रा(1000) नवतिं(90) नव(9) श्रुतो नि चक्रेण रथ्या दुष्पदावृणक्।।

(ऋग्वेद / मण्डल 1 / सूक्त 53 / मंत्र 9)

(अथर्ववेद / काण्ड 20सूक्त 21 / मंत्र 9)

चतुर्भिः(4) साकं नवतिं(90) च नामभिः चक्रं न वृत्तं व्यतीरंवीविणत्।
वृहच्छशरीरो विभिमान ऋक्वभिः युवाकुमारः प्रत्येत्याहवम्।।

(ऋग्वेद / मण्डल 1 / सूक्त 155 / मंत्र 6)

द्वादश (12) प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि(3) नभ्यानि क उ तच्चिकेत।
तस्मिन त्साकं त्रिशता (300) न शंकवोऽर्पिताः षष्टि(60) र्न चलाचलासः।।

(ऋग्वेद / मण्डल 1 / सूक्त 164 / मंत्र 48)

द्वादशारं (12) नहि तज्जराय वर्वर्ति चक्रं परि द्यामृतस्य।
आ पुत्रा अग्ने मिथनासो अत्र सप्तशतानि(700) विंशति(20)श्च तस्थुः।।

(ऋग्वेद / मण्डल 1 / सूक्त 164 / मंत्र 11)

द्विर्यपंच ($2 \times 5 = 10$) स्वयशसं सखायो अद्रिसं हतम्।
प्रियमिन्द्रस्य काम्यं प्रश्नापयन्त ऊर्मयः।।

(सामवेद {5} / उत्तरार्चिक / खण्ड 11 / मंत्र 2)

ये त्रिषप्ताः($3 \times 7 = 21$) परियन्ति विश्वा रूपाणि बिभ्रुवः।
वाचस्पतिर्बला तेषां तन्वो अद्य दधातु मे।।

(अथर्ववेद / काण्ड 1 / सूक्त 1 / मंत्र 1)

युवं श्वेतं पेदवेऽश्विनाश्वं नवभिः(9) वाजेः नवती(90) च वाजिनम्।
चर्कृत्यं ददथुर्द्रावयत्सखं भगं न नृभ्यो हवां मयोभुवम्।।

(ऋग्वेद / मण्डल 10 / सूक्त 39 / मंत्र 10)

अध्याय एक (ख)

भारतीय काल गणना का वैज्ञानिक स्वरुप
(Scientific form of Indian way of Calculation of Time)

प्रकाशन (Publication)

- भारतीय नव वर्ष ही दुनियाँ का नव वर्ष,, बुन्देलखण्ड केसरी (साप्ताहिक), राठ, वर्ष 1, अंक 9, मार्च 21, 2004, पृ0 4।
- भारतीय काल गणना, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, अक्टूबर 06, पृ0 34–38।

1.ख.1 प्रस्तावना (Introduction)

1.ख.2 पाश्चात्य कालगणना (Western way of Calculation of Time)

1.ख.3 भारतीय कालगणना (Indian way of Calculation of Time)

1.ख.4 निष्कर्ष (Conclusion)

1.ख.5 संदर्भ ग्रन्थ (References)

1.ख.1 प्रस्तावना (Introduction) :

मानव मन सदैव जिज्ञासु रहा है कि सृष्टि की उत्पत्ति कब हुई तथा यह सृष्टि कब तक रहेगी। कहा गया है कि सृष्टि पूर्व तम तमोलय या तपशक्तियुक्त एक तत्व था जिसकी इच्छाशक्ति के प्रभाव से वह साम्यावस्था टूटी और अव्यक्त से यह ब्रह्माण्ड उत्पन्न हुआ। इसी के साथ ही कालयात्रा प्रारम्भ हो गयी। हमारे ऋषियों ने उद्घोष किया है 'कलयति सर्वाणि भूतानि' अर्थात् जो सम्पूर्ण सृष्टि को लील जाता है, वही 'काल' है। आगे कहा है कि सृष्टि की उत्पत्ति, स्थिति, परिवर्तन एवं लय के रूप में 'विराट काल चक्र' सतत चलायमान है। कालगणना किसी भी देश के लोगों की बुद्धिमत्ता एवं जाग्रतावस्था का मापदण्ड है। यह मानवीय सभ्यता के विकास एवं उत्कर्ष का सूचक है। यह विविध सामाजिक, राजनैतिक एवं नैसर्गिक घटनाओं को कालक्रम के परिप्रेक्ष्य देखने की उद्यमशीलता, योग्यता एवं चेतना का द्योतक है। भारतीय काल गणना की सर्वाधिक प्राचीनता, वैज्ञानिकता एवं सूक्ष्म विवेचना इस बात का स्पष्ट प्रमाण है कि मानव का प्रथमावतरण इस भूभाग पर हुआ और महर्षियों ने व्यक्ति, जाति, मत एवं राष्ट्र के आधारों को परे रखकर 'काल' के मौलिक स्वरूप को स्वीकार {1–2} करते हुये इसके सूक्ष्मतम रुप का प्रतिपादन किया है। प्रस्तुत शोधकार्य का उद्देश्य पाश्चात्य कालगणना की अवैज्ञानिकता एवं भारतीय कालगणना की वैज्ञानिकता का प्रतिपादन करता है।

1.ख.2 पाश्चात्य कालगणना (Western way of Calculation of Time) :

Encyclopedia Britannica, Vol. 22 (1963) में कलेण्डर का संक्षिप्त {3–4} इतिहास दिया गया है। कलेण्डर याने समय विभाजन की विधि–वर्ष, मास दिन को पृथ्वी और चन्द्रमा की गति के आधार पर निर्धारित करना। ऐतिहासिक घटना के आधार पर समय विभाजन करने की दृष्टि से ईसाई मानते हैं कि ईसा का जन्म इतिहास की निर्णायक घटना है। इस आधार पर वह इतिहास को दो भागों में विभाजित करते हैं 1. ईसा पूर्व (B.C या Before Christ) 2. ईसा पश्चात (A.D या Anno Domino), इसी से ईसवी सन की उत्पत्ति हुई है। पाश्चात्य जगत में प्रचलित कलेण्डर निम्नवत् हैं:–

(अ) रोमन कलेण्डर (Roman Calender) : वर्तमान में प्रचलित ईस्वी सन का मूल रोमन सम्वत है। इसका शुभारम्भ ईसा से 753 वर्ष पूर्व रोम नगर की स्थापना से हुआ था। इसमें वर्ष दस माह का होना था, जो मार्च से दिसम्बर तक चलता था। वर्ष का सातवां महीना या सप्तम वर्ष (सेप्तेम्बर), आठवां महीना या अष्टम वर्ष (आक्टोबर), नवां महीना या नवम वर्ष (नवम्बर), एवं दसवां महीना या दशम वर्ष (दसम्बर) थे। वर्ष में 304 दिन होते थे। कालान्तर में राजा नूमा पिम्पोलियस ने

इसमें दो माह जनवरी एवं फरवरी जोड़कर 12 मास का वर्ष बनाया, जिसमें 355 दिन होते थे। माह के नाम वही प्रचलित रहे।

(ब) जूलियन कलेण्डर (Julian Calendar) : लाहिड़ी के भारतीय पंचांग 2004 में {5}उल्लेख है कि जूलियन पंचांग ईसा पूर्व 46 वर्ष में रोमन साम्राज्य में ज्यौतिषी सोसिजिनीस की सलाह पर रोम के प्रचलित पंचांगों को संशोधित करके बनाया गया था।

It remained in general use in the West until 1582, when it was further modified into the Gregorian calendar which has come into world wide use for civil purposes. In the Julian calendar a common year is defined to comprise 365 days and every fourth year is a leap year comprising 366 days.

ईसा से 46 वर्ष पूर्व जूलियस सीजर ने वर्ष 365.25 दिन का करने के लिये आदेश दिया। उस समय के वर्ष को कहा कि इसमें 445.25 दिन होंगे ताकि पूर्व में आया अन्तर ठीक किया जा सके। इतिहास में उस वर्ष को सम्भ्रम का वर्ष कहा जाता है। इतिहास में अपना नाम अमर करने के लिये उसने सातवां महीना जुलाई करवाया। पश्चात में सम्राट आगस्टस ने भी अपना नाम अमर करने के लिये आठवां महीना अगस्त जुड़वाया। उस समय आठवां महीना 30 दिन का होता था। फरवरी से एक दिन लेकर अगस्त 31 दिन का करवाया। पूर्व नाम यथावत प्रचलित रहे।

(स) ग्रेगोरियन कलेण्डर (Gragorian Calendar) : The Julian year of 365.25 days was longer than the true year of 365.2422 by 0.0078 days and so discrepancy was noticed in the observance of Easter day. In 1582 the error in the calendar reckoning accumulated to 10 days. In 1582, Pope Gregory XIII revised the calendar and ordained that Friday, October 5 of that year was to be counted as Friday, October 15. For the future, centurial years that were not divisible by 400 were not to count as leap years. As such the century year 1600, 2000, 2400 which are divisible by 400 are leap years whereas the century years 1700, 1800, 1900, 2100 although divisible by 4, are not leap years. As a result the number of leap years in 400 years was reduced from 100 to 97 and the year length of the calendar thus became 365.2425 days, the error being only one day in 3300 years. In Great Britain, it was officially introduced in 1752 when the error accumulated to 11 days and in that year 3rd September of Julian calendar, Thursday was designated as the 14th September of Gregorian calendar, Thursday at the same time in Great Britain the beginning of the year was changed from March 25 to January 1, commencing with the year 1752. In some countries the Gregorian calendar was not adopted until the 20th Century.

रोमन कैथोलिकों ने पोप के आदेश को तुरन्त माना पर जेटेस्टेटों ने धीरे धीरे माना। ब्रिटेन 1752 तक जूलियन कलेण्डर मानता रहा। 1752 के पूर्व तक ग्रेट ब्रिटेन में भी नया वर्ष 25 मार्च को मनाया जाता था जो भारतीय नव वर्ष के सन्निकट है। उस समय लोग नारा लगाते थे Jesus

Christ back our 11 days. इंग्लैण्ड के बाद बुल्गारिया ने 1918 में एवं ग्रीक आर्थेडामा चर्च ने 1924 में ग्रेगोरियन कलेण्डर स्वीकार किया।

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि विश्व में प्रचलित ईस्वी सन की कालगणना में सूर्य की पृथ्वी द्वारा एक परिक्रमा करने में लगने वाला समय अर्थात वर्ष को छोड़कर शेष बातें अवैज्ञानिक हैं।

1.ख.3 भारतीय कालगणना (Indian way of Calculation of Time) :

श्रीमद्भागवत में राजा परीक्षित महर्षि शुकदेव से जिज्ञासा करते हैं कि काल क्या है? इसका सूक्ष्मतम एवं वृहत्तम स्वरूप क्या है? शुकदेव मुनि समझाते हैं 'विषयों का रूपान्तर (परिवर्तन) ही काल का आकार है। उसी को निमित्त बना वह काल तत्व अपने को अभिव्यक्त करता है। वह अव्यक्त से व्यक्त होता है' काल का सूक्ष्मतम रूप परमाणु एवं वृहत्तम रूप {6–11} ब्रह्म आयु है।

(य) काल मापनी : प्रचलित विभिन्न कालमापनी निम्नवत है:–

(अ) ऋषि शुकदेव द्वारा वर्णित कालमापनी इस प्रकार है–

2 परमाणु – 1 अणु   3 अणु – 1 त्रसरेणु   3 त्रसरेणु – 1 त्रुटि
100 त्रुटि – 1 वेध   3 वेध – 1 लव   3 लव – 1 निमेष
3 निमेष – 1 क्षण   5 क्षण – 1 काष्ठा   15 काष्ठा – 1 लघु
15 लघु – 1 नाड़िका   2 नाड़िका – 1 मुहूर्त   3 3/4 मुहूर्त – 1 प्रहर
8 प्रहर – 1 अहोरात्र   7 अहोरात्र – 1 सप्ताह   1 अहोरात्र – 60 घड़ी
1 घड़ी – 60 पल – 24 मिनट   1 पल –60 विपल –24 सेकेण्ड, 1 विपल–60 प्रतिविपल– 24 प्रति सेकेण्ड
2 सप्ताह – 1 पक्ष   2 पक्ष – 1 मास   2 मास – 1 ऋतु
3 ऋतु – 1 अयन   2 अयन – 1 वर्ष
(ब) 360 दिन – 1 वर्ष   1 वर्ष – 1 दिव्यदिन   360 दिव्यदिन – 1 दिव्यवर्ष
12,000 दिव्यवर्ष – 1 चतुर्यग 1,000 चतुर्यग – 1 ब्रह्मादिन – 1 कल्प, 4,32,00,00,000 मानवी वर्ष – 14 मन्वन्तर
(स) कलियुग – 4,32,000 वर्ष   2 कलियुग (द्वापरयुग) – 8,64,000 वर्ष
3 कलियुग (त्रेता युग) – 12,96,000 वर्ष   4 कलियुग (सतयुग) – 17,28,000 वर्ष
(द) 4 युगों का 1 महायुग –43,20,000 वर्ष   71 महायुग +1 सतयुग का 1 मन्वन्तर – 30,84,48,000 वर्ष
14 मन्वन्तर + 1 सतयुग का 1 कल्प – 4,32,00,00,000 वर्ष   2 कल्प – 1 ब्रह्मा दिवस
360 ब्रह्मा दिवस – 1 ब्रह्मावर्ष   50 ब्रह्मावर्ष – प्रथम परार्द्ध   100 ब्रह्मा वर्ष – ब्रह्मा आयु
(य) 60 सेकण्ड – 1 मिनट   60 मिनट – 1 घण्टा   24 घण्टा – 1 दिन
7 दिन – 1 सप्ताह   2 सप्ताह – 1 पक्ष   2 पक्ष – 1 मास
12 मास – 1 वर्ष   25 वर्ष – रजत जयन्ती   50 वर्ष – स्वर्ण जयन्ती
60 वर्ष – हीरक जयन्ती (षष्ठिपूर्ति)   75 वर्ष – कौस्तुभ जयन्ती (सहस्र चन्द्रदर्शन)
100 वर्ष – शताब्दी   1000 वर्ष – सहस्राब्दी

(र) दिनों के नाम : दिन एवं रात के संयुक्त कालमान को 'अहोरात्र' कहा जाता है। अ एवं त्र रहित अ–होरा–त्र 'होरा' कहलाता है। अहोरात्र में 24 होरायें होती हैं। यह होरायें, सूर्य, चन्द्र, मंगल, बुध, गुरू, शुक्र एवं शनि, सप्तग्रहों के नाम पर होती हैं। सूर्योदय के समय जिस ग्रह की होरा होती है, उसी के नाम पर उस दिन का नाम होता है। सूर्योदय से आगामी सूर्योदय पूर्व तक दिन का नाम

रहता है। पच्चीसवीं होरा से दूसरे दिवस का नाम रहता है। सूर्य से सृष्टि का निर्माण है अतः पहली होरा सूर्य की होती है, जिससे उस दिन का नाम सूर्यवार अथवा रविवार है। आगामी दिन की पच्चीसवीं होरा चन्द्र की होता है अतः दूसरे दिवस का नाम चन्द्रवार अथवा सोमवार होता है। तीसरे दिवस के प्रातःकाल पच्चीसवीं होरा मंगल की होती है अतः तीसरे दिवस का नाम मंगलवार होता है। इसी प्रकार चौथे दिवस का नाम बुधवार, पांचवें दिवस का नाम गुरूवार, छठवें दिवस का नाम शुक्रवार तथा सातवें दिवस का नाम शनिवार होता है। सप्तग्रहों के नाम पर सात दिवसों के नाम रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरूवार, शुक्रवार एवं शनिवार हैं। सात दिवसों का समूह सप्ताह कहलाता है। यहाँ पर यह ध्यान देने योग्य है कि 'होरा' को ही अंग्रेजी में Hour (हावर) कहा गया है, जिसका उच्चारण 'आवर' बताया जाता है। यदि आपने उच्चारण 'हावर' किया तो कहा जायेगा कि आपको अंग्रेजी नहीं आती। अहोरात्र में 24 होरायें अर्थात 24 Hour (24 घण्टे) होते हैं। सूर्य की परिक्रमा पृथ्वी एक लाख कि0मी0 प्रतिघण्टा की गति से कर रही है। पृथ्वी का चलना सौर दिन कहलाता है।

(ल) महीनों के नाम : दृश्य जगत में सब कुछ चलायमान है। इसीलिये ब्रह्माण्ड में कुछ तारा पुंजों जो पृथ्वी से बहुत दूर स्थित हैं, को स्थिर मानकर कालगणना की गई है। तारा पुंज को नक्षत्र कहा गया है। ब्रह्माण्ड में 27 नक्षत्र माने गये हैं जो क्रान्तिवृत्त की परिधि पर स्थित हैं। पूर्णचन्द्र के दिन अर्थात पूर्णमासी के दिन जो नक्षत्र होता है, उसी के नाम पर उस महीने का नाम होता है, इस प्रकार–

	नक्षत्र	मास		नक्षत्र	मास
1.	चित्रा	चैत्र	7.	अश्विनी	आश्विन
2.	विशाखा	बैसाख	8.	कृतिका	कार्तिक
3.	ज्येष्ठा	ज्येष्ठ	9.	मृगशिरा	मार्गशीष
4.	आषाढ़ा	आषाढ़	10.	पुष्य	पौष
5.	श्रवण	श्रावण	11.	मघा	माघ
6.	भाद्रपद	भाद्रपद	12.	फाल्गुनी	फाल्गुन

(व) तिथियों के नाम : जब चन्द्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करते हुये सूर्य से 12^0 आगे निकल जाता है तो एक तिथि होती है। यह चन्द्रदिन है। इस प्रकार वृत्त के 360^0 के कारण 30 तिथियां होती हैं। दीर्घवृत्ताकार पथ पर कभी कभी चन्द्रमा अहोरात्र में 12^0 से कम दूरी तय करता है, तब एक ही तिथि दो दिन चलती है, इस प्रकार तिथि वृद्धि होता है। कभी कभी चन्द्रमा अहोरात्र में 12^0 से अधिक दूरी तय करता है तब एक ही दिन में दो तिथियां हो जाती हैं, इस प्रकार तिथि क्षय हो जाता है। अर्थात तिथि क्षय एवं तिथि वृद्धि शास्त्रशुद्ध एवं विज्ञान सम्मत हैं। हम जानते हैं कि चन्द्रमा पन्द्रह दिन तक क्रमशः बढ़ता है, इसको शुक्लपक्ष (रात्रि में प्रकाश अधिक) कहा जाता है।

शुक्ल पक्ष में प्रतिपदा से पूर्णिमा तक (1–15) 15 तिथियां होती हैं चन्द्रमा 15 दिन तक क्रमशः घटता है इसको कृष्णपक्ष (रात्रि में प्रकाश कम) कहा जाता है। कृष्णपक्ष में प्रतिपदा से अमावस्या तक (16–30) 15 तिथियां होती हैं। अमावस्या को चन्द्रमा पृथ्वी एवं सूर्य के मध्य रहता है, यह 0^0 कहलाता है। पूर्णिमा को चन्द्रमा सूर्य के 180^0 अन्तर पर आ जाता है।

वेदों की तैत्तिरीय संहिता {12} में नक्षत्रों एवं उनके स्वामियों का निम्नवत् वर्णन हैः–

कृत्तिका नक्षत्रमाग्निर्देवताऽग्ने रूचः स्थ प्रजापतेर्धानुः सोस्यर्चे त्वा रूचे त्वा द्युते त्वा मासे त्वा ज्योतिषे त्वा रोहिणी नक्षत्रं प्रजापर्तिदेवता मृगशीर्ष नक्षत्रं सोमा देवताऽऽर्द्रा नक्षत्रंॅ रूद्रो देवता पुनर्वसू नक्षत्रमदितिर्देवता तिष्यो नक्षत्रं वृहस्पतिर्देवताऽऽश्रेषा नक्षत्रंॅ सर्पा देवता मधा नक्षत्रं पितरो देवता फाल्गुनी नक्षत्रमर्यमा देवता फाल्गुनी नक्षत्रं भगो देवता हस्तो नक्षत्रं सविता देवता चित्रा नक्षत्रमिन्द्रो देवता स्वाती नक्षत्रं वार्युदेवता विशाखे नक्षत्रमिन्द्राग्नी देवताऽ अनुराधा नक्षत्रं मित्रो देवता रोहिनी नक्षत्रमिन्द्रो देवता विचृतौ नक्षत्रं पितरो देवताऽषाढ़ा नक्षत्रंमापो देवताऽषाढ़ा नक्षत्रं विश्वेदेवा देवता श्रोणा नचत्रं विष्णुर्देवता श्रविष्ठा नक्षत्रं वावो देवता शतभिवड् नक्षत्रंमिन्द्रो देवता श्रेष्ठपदा नक्षस्त्रमजएकद्देवता प्रोष्ठपता नक्षत्रमहिर्बुध्नयो देवता रेवती नक्षत्रं पूषा देवताऽश्वयुजौ नक्षत्रश्विनौ देवताऽपभरणीर्नक्षत्रं ययो देवता पूर्णा पश्चाद्यत् ते देवा अदधुः।।

(तैत्तिरीय संहिता का 4, प्र0 4 अं. 1.0)

360^0 वाले 27 नक्षत्रों के भचक्र को, चन्द्रकलाओं की 30 दिन के अन्दर पुनरावृत्ति दृष्टिगत रखते हुये, 30^0–30^0 के 12 भागों में विभाजित किया गया। ये द्वादश भाग इस नक्षत्र चक्र के 12 अरे कहलाते हैं। ऋग्वेद {13} में दृष्टा उद्घोष करते हैं–

"द्वादशारं न हि तज्जराय वर्तर्ति चक्रं परिद्याकृतस्य ।
आयुत्रा अग्ने मिथुनासो अत्र सप्तशतानि विंशतिश्रतस्थुः" ।।

(ऋग्वेद /1/104/11)

इसका तात्पर्य है कि 12 अरों वाला यह चक्र द्युलोक की परिक्रमा करता हुआ जर्णरित नहीं होता है। हे अग्नि, 720 पुत्र युगव रूप में अर्थात् 360^0 अहोरात्र के रूप में इस अचक्र पर विचरण करते हैं। पुनश्च

"द्वादश प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि नाभ्यानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मिन् त्साकं त्रिशता न शंकवोऽर्पितताः षष्टिर्न चलाचलास" ।।

(ऋग्वेद/1/164/48)

इसका भावार्थ है कि 12 धुरों वाला तथा 38 ऋतु रूपी नाभियों वाला एक चक्र है। उसे कौन जानता है? उसमें 360 शंकु अर्पित हैं।

27 नक्षत्रों में से प्रत्येक के चार भाग किये गये। इस प्रकार अचक्र के कुल 108 भाग हुये। नौ पाद की आकृति के अनुसार 12 राशियों के नाम रखे गये। यह हैं –

(1) मेष (2) वृष (3) मिथुन (4) कर्क
(5) सिंह (6) कन्या (7) तुला (8) वृश्चिक
(9) धनु (10) मकर (11) कुम्भ (12) मीन

पृथ्वी पर इन राशियों की रेखा निश्चित की गई, जिसे क्रान्ति कहा जाता है। ये क्रान्तियां विषुव वृत्त रेखा से 24 उत्तर एवं 24 दक्षिण में मानी जाती हैं। इस प्रकार पृथ्वी के परिक्रमा के कारण सूर्य जिस राशि में आता है, उस क्रान्ति के नाम पर सौर नाम होता है यह साधारण वृद्धि एवं क्षयरहित है।

(श) सप्ताह : पृथ्वी से उत्तरोत्तर दूरी के आधार पर ग्रहों का क्रम निर्धारित किया गया। यह है– चन्द्र, बुध, शुक्र, सूर्य, मंगल, गुरू एवं शनि। इनमें चन्द्र पृथ्वी के सन्निकट एवं शनि अति दूरस्थ हैं। अहोरात्र की 24 होराओं या घण्टों में एक–एक घण्टे का अधिपति एक–एक ग्रह होता है। सूर्योदय के समय की होरा का जो अधिपति होता है, उसके नाम पर दिन का नाम रखा जाता है। सप्ताह के दिन व उनका क्रम भारतवर्ष में खोजे गये क्रम के अनुसार ही सम्पूर्ण विश्व में प्रचलित है। यथा रवि (Sun) वार (Day), चन्द्र (Moon) वार (Day), शनि(Saturn) वार (Day).

(ष) अयन : पृथ्वी अपनी कक्षा पर 23.5^0 उत्तर–पश्चिम झुकी हुई है। अतः भूमध्यरेखा से 23.5^0 उत्तर व दक्षिण में सूर्य की किरणें लम्बवत् आपतित होती हैं। सूर्य की किरणों का लम्बवत् आपतन संक्रान्ति कहलाता है। 23.5^0 उत्तर को कर्क रेखा कहा जाता है तथा दक्षिण रेखा को मकर रेखा कहा जाता है। भूमध्य रेखा को 0^0 अथवा विषुव वृत्त रेखा कहते हैं। कर्क संक्रान्ति को उत्तरायण एवं मकर संक्रान्ति को दक्षिणायन कहा जाता है।

(स) वर्ष : पृथ्वी सूर्य के चारों ओर लगभग 1 लाख किमी0 प्रति घण्टे की गति से 365.2422 दिन (365 दिन 5 घण्टे 48 मिनट 46 सेकण्ड) में एक चक्र पूरा करती है। इसको वर्षमान कहा जाता है।

(ह) युग : 4,32,000 वर्ष में सातों ग्रह अपने भोग एवं शर को छोड़कर एक रेखा पर आते हैं। इस युति के काल को कलियुग कहा जाता है। द्वियुति द्वापर, त्रियुति त्रेता एवं चतुर्युति सतयुग के नाम से जाना जाता है। चतुर्युगी में सातों ग्रह अपने भोग एवं शर सहित एक ही दिशा में आते हैं, इसको महायुग कहा जाता है। इसका मान 43,20,000 वर्ष है।

वैदिक ऋषियों के अनुसार वर्तमान सृष्टि पंचमण्डल क्रम वाली है। चन्द्रमण्डल, पृथ्वीमण्डल, सूर्यमण्डल, परमेष्टि मण्डल एवं स्वायम्भुव मण्डल। यह उत्तरोत्तर मण्डल का चक्कर लगा रहे हैं। चन्द्रमण्डल द्वारा पृथ्वी मण्डल की एक परिक्रमा की अवधि चन्द्रमास है। पृथ्वी मण्डल द्वारा सूर्य मण्डल की एक चक्र का समय एक वर्ष है।

(च) मन्वन्तर : सूर्य मण्डल द्वारा परमेष्टि मण्डल (आकाश गंगा) के एक परिक्रमण का समय मन्वन्तर कहलाता है। इसका कालमान है– 30,67,00,000 वर्ष। एक से दूसरे मन्वन्तर के मध्य 1 संध्यांश सतयुग के तुल्य होता है। अतः संध्यांश सहित मन्वन्तर मान है 30,84,28,000 वर्ष। आधुनिक मान्यता के अनुसार सूर्य को आकाश गंगा की परिक्रमा में 25 से 27 करोड़ वर्ष लगते हैं।

(छ) कल्प : परमेष्टि मण्डल स्वायम्भुव मण्डल की परिक्रमा कर रहा है। अर्थात यह आकाश गंगा अपने से ऊपर वाली आकाश गंगा का परिक्रमण कर रही है। इस काल को कल्प कहा जाता है इसका मान है 4 अरब 32 करोड़ वर्ष। इसको ब्रह्मा का एक दिन कहा जाता है। जितना बड़ा दिन, उतनी ही बड़ी रात, अतः ब्रह्मा का अहोरात्र 8 अरब 64 करोड़ वर्ष का होता है। अतः ब्रह्मा वर्ष = 31,10,40,00,00,000 वर्ष एवं ब्रह्मा आयु (ब्रह्माण्ड की आयु) 31,10,40,00,00,00,000 वर्ष है।

भारतीय मनीषियों की इस गणना को देखकर यूरोप के सुप्रसिद्ध ब्रह्माण्ड विज्ञानी कार्ल सेगन ने अपनी पुस्तक 'Cosmos' में कहा {14–16} है कि "जगत में हिन्दू धर्म ही एक ऐसा धर्म है जो इस विश्वास को समर्पित है कि इस ब्रह्माण्ड में उत्पत्ति और लय की एक अनवरत प्रक्रिया चल रही है। और यही एक ऐसा धर्म है, जिसने समय के सूक्ष्मातिसूक्ष्म से लेकर वृहत्तम मान, जो अहोरात्र से लेकर ब्रह्मा के 8,64,00,00,000 अहोरात्र तक है, की गणना की है, जो संयोगवशात् आधुनिक खगोलीय आंकलनों के अत्यन्त निकट है। कार्ल सेगन ने इसे संयोग कहा है वस्तुतः यह ग्रह गतियों की ठोस गणनाओ पर आधारित है"।

(ज) संकल्प मंत्र : अपने पूर्वजों ने खगोलीय गति के आधार पर सूक्ष्मतम से वृहत्तम काल का मापन किया एवं काल की अनन्त यात्रा को वर्तमान सद्यस्थिति से जोड़कर सर्वसाधारण मनुष्य उसको स्मरण रखे इस हेतु एक आश्चर्यजनक व्यवस्था दी, जिसका नाम है "संकल्प मंत्र"। अपने यहां पर कोई भी पुनीत कार्य यथा भूमिपूजन, गृह प्रवेश, जन्मोत्सव, पाणिग्रहण आदि हो सर्वप्रथम एक विशिष्ट मंत्र का उच्चारण करके संकल्प किया जाता है। यही संकल्प मंत्र अनन्त काल से लेकर आज तक की स्थिति का स्मरण दिलाने वाला मंत्र है। यह है–

"ॐ विष्णुर्विष्णुर्विष्णुः ॐ तत्सदद्य श्रीमद्भगवते महापुरूषष्य विष्णोराज्ञया प्रवर्तमानस्य ब्रह्मणोऽह्नि द्वितीय परार्द्ध श्रीश्वेत वाराह कल्पे सप्तमे वैवस्वत मन्वन्तरे अष्टाविंशतितमे कलियुगे कलिप्रथम चरणे... युगाब्दे जम्बूद्वीपे भारतवर्षे भारतखण्ड आर्यावर्त्तैकिदेशान्तर्गत पुष्यक्षेत्रो ... स्थाने ... सम्वत्सरे ... अपने ... ऋतौ ... मासे ... पक्षे ... तिथौ ... वासरे ... समये ... गोत्रोत्पन्नः ... नामाहं ...।

उपर्युक्त को 30 मार्च 2007 को आधार मानकर गणना करते हैं तो हम ब्रह्मा के दिन से द्वितीय परार्द्ध में श्री श्वेत वराह कल्प में सातवें वैवस्वत मन्वन्तर में अट्ठाइसवें कलियुग के प्रथम चरण में प्रवेश कर चुके हैं। कलियुग के 5108 वर्ष बीत चुके हैं।

6 मन्वन्तर = 6x 30,84,48,000	=	1,85,06,88,000 वर्ष
27 महायुग = 27 x 43,20,000	=	11,66,40,000 वर्ष
26वां सत + त्रेता + द्वापर = 9x4,32,000	=	38,88,000 वर्ष
कलियुग के 5107 वर्ष	=	5,108 वर्ष
		1,97,12,21,108 वर्ष

अतः 30 मार्च 2007 को सृष्टि सम्वत् 1,97,12,21,109 वाँ वर्ष प्रारम्भ हो चुका है।

वर्तमान कलियुग का शुभारम्भ भारतीय कालगणनानुसार ईसा से 3102 वर्ष पूर्व 20 फरवरी को 2 बजकर 27 मिनट 30 सेकण्ड पर हुआ था। उस समय सभी ग्रह एक ही राशि में थे। इस संदर्भ में यूरोप के प्रसिद्ध खगोल वैज्ञानिक का कथन है कि "हिन्दुओं की खगोलीय गणना के अनुसार विश्व का वर्तमान समय अर्थात कलियुग का आरम्भ ईसा के 3102 वर्ष पूर्व 20 फरवरी को 2 बजकर 27 मिनट 30 सेकण्ड पर हुआ था। इस प्रकार यह काल गणना मिनट और सेकण्ड तक की गई। आगे वे अर्थात हिन्दू कहते हैं, कलियुग के समय सभी ग्रह एक ही राशि में थे तथा उनके पंचांग भी यही व्यक्त करते हैं। विद्वानों द्वारा की गई गणना खगोलीय सारणी द्वारा पूर्णतः प्रमाणित होती है। इसका कारण और कुछ नहीं, अपितु ग्रहों के प्रत्यक्ष निरीक्षण के फलस्वरूप समान परिणाम प्राप्त हुये हैं।

1.ख.4 निष्कर्ष (Conclusion) :

अपने पूर्वजों ने जिन भी सद्ग्रन्थों की रचना की है, अपने उन ग्रन्थों मे उस समय की ग्रह स्थिति की भली भांति वर्णन किया है। अतः उनके रचनाकाल एवं ऋषियों की आयु का सम्यक् विचार किया जाना अत्यावश्यक है, जिससे उनकी प्राचीनता की पुष्टि की जा सकेगी। मन्वविद इस प्रकार की घड़ी का निर्माण कर सकते हैं जिसमें तिथियां एवं ग्रहों की सद्यःस्थिति देखी जा सके जिससे अनेकों समस्याओं का समाधान सम्भव हो सकेगा।

भारतीय काल गणना पंचमण्डलों (चन्द्र, पृथ्वी, सूर्य, परमेष्टि एवं स्वायम्भुव) एवं सौर परिवार के ग्रहों की गतियों के सूक्ष्म प्रेषणों एवं प्रतिक्षण होने वाले परिवर्तनों के आधार अर्थात ठोस वैज्ञानिक धरातल पर आधारित है जबकि ईस्वी सन की काल गणना केवल पृथ्वी द्वारा सूर्य की

परिक्रमा में लगने वाले समय पर आधारित है अन्य ग्रहों की गतियों का उसमें कोई विचार नहीं किया गया है।

1.ख.5 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} प्राचीन भारत में विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी, संकलन विज्ञान भारती, मुम्बई (2002)
{2} B.B Dutta & A.N.Singh, History of Hindu Mathmatics, Bhartiya Prakashan, New Delhi (2001)
{3} Encyclopedia Britannica, William Benton, London, Vol. 22, 1963, pp. 224.
{4} सुरेश सोनी, भारत में विज्ञान की उज्जवल परम्परा, अर्चना प्रकाशन, भोपाल (2003)
{5} Indian Ephemesis, Astro-Research Bureau, Kolkata (2004)
{6} डा0 कैलाश, भारतीय नव वर्ष ही दुनिया का नव वर्ष, बुन्देलखण्ड केसरी (साप्ताहिक) राठ, वर्ष 1, अंक 9, मार्च 21, 2004, पृ0 4।
{7} कैलाश, अमित कुमार शर्मा एवं कृष्णमूर्ति राजू, भारतीय काल गणना, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, अक्टूवर 06, पृ0 34–38।
{8} दिलीप सरदेशाजी, वैज्ञानिक काल गणना, शैक्षिक संकल्प, लखनऊ, नव0 2003, पृ0 11–13।
{9} रविप्रकाश आर्य, भारतीय कालगणना का वैज्ञानिक एवं वैश्विक स्वरूप, अखिल भारतीय इतिहास संकलन योजना, नई दिल्ली (1998)
{10} Lalit Kishor Pandey, Modern Scientific Vision of the Old Indian Mind, स्मारिका एकात्म मानव विज्ञान, जबलपुर, दिसम्बर 2005, पृ0 73–78।
{11} लीलावती, कृष्णदास अकादमी, वाराणसी (1993)
{12} शब्द–वेदः, राजस्थान पत्रिका, जयपुर, 2000।
{13} ऋग्वेद, श्रीपाद दामोदर सातवलेकर, स्वाध्याय मण्डल, किल्ला, बलसाड, गुजरात (1996)
{14} Carl Sagar, Cosmos, Ballantine Books, New York, (1980)
{15} M. M. Joshi, Bharatiya Heritage in Engineering and Technology (Inaugural Address) Indian Institute of Science, Bangalore, 2006.
{16} Academy of Sankrit Research, Mathematics in Ancient India, Science India, Cochin, Vol. 10, No. 8 & 9, Sept. 2007, pp. 54-58.

अध्याय एक (ग)

प्राचीन भारतीय वाङ्मय में कूटांक
(Numerical Codes used in Ancient Indian Literature)

प्रकाशन (Publication)

- प्राचीन भारतीय वाङ्मय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340—344।
- प्राचीन भारतीय वाङ्मय में शब्द कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, जून 2007, पृ0101—103।
- प्राचीन भारतीय वाङ्मय में व्यंजन कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, अगस्त 2007, पृ0 88—89।

1.ग.1 प्रस्तावना (Introduction)

1.ग.2 शब्द कूटांक (Word Numerical Code)

1.ग.3 व्यंजन कूटांक (Consonant Numerical Code)

1.ग.4 वर्ण कूटांक (Letter Numerical Code)

1.ग.5 निष्कर्ष (Conclusion)

1.ग.6 संदर्भ ग्रन्थ (References)

1.ग.1 प्रस्तावना (Introduction) :

मानव आदि काल से ही अपनी भावनाओं एवं विचारों को संकेतों एवं भाषा के द्वारा अभिव्यक्त करता रहा है। गोपनीय संकेत सम्प्रेषित करने के लिये विभिन्न शब्दावली का प्रयोग कूट भाषा कहलाती है। देवनागरी लिपि के अक्षरों का उपयोग करते हुये अंकों एवं संख्याओं को व्यक्त करना {1–3} कूटांक कहलाता है। देवनागरी लिपि की विशेषताओं का लाभ उठाते हुये तीन प्रकार के कूटांक बनाये जा सकते हैं। शब्दों को अंकों एवं संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "शब्द कूटांक" कहलाता है। शब्द कूटांकों का उपयोग गणित एवं ज्यौतिषादि ग्रन्थों में भरपूर किया गया है। देवनागरी लिपि के व्यंजनों को अंकों के रूप में एवं व्यंजनों एवं स्वरों से निर्मित शब्दों को संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "व्यंजन कूटांक" कहना उचित है। व्यंजन कूटांक का उपयोग भी गणित एवं ज्यौतिष के ग्रन्थों में प्राप्त होता है। देवनागरी लिपि के अक्षरों, आकार रहित व्यंजनों को अंकों एवं संख्याओं के रूप में तथा स्वरों को दशघातीय संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "वर्ण कूटांक" कहना श्रेयस्कर है। वर्ण कूटांकों का उपयोग भी गणित के ग्रन्थों में मिलता है।

1.ग.2 शब्द कूटांक (Word Numerical Code) :

देवनागरी लिपि से निर्मित शब्दों को अंकों एवं संख्याओं के रूप में व्यक्त करना शब्द कूटांक कहलाता है। शब्द कूटांकों के माध्यम से रचित पद्य (स्लोक) द्वारा सर्वसाधारण मनुष्य भी बड़ी बड़ी संख्याओं को सुविधापूर्वक मुखस्थ कर सकता है। किसी अंक अथवा संख्या विशेष के स्थान पर विशिष्ट शब्द अथवा उसके समानार्थी शब्द का उपयोग "शब्द कूटांक" की श्रेणी में आते हैं। गणित एवं ज्योतिष के ग्रन्थों में प्रचलित शब्द कूटांकों की सूची निम्नवत् है:–

0 शून्यम्, पूर्ण, वियत् एवं आकाश के नाम (ख, अभ्र, नभ, गगन, ––––)

1 एक, रुप ,पृथ्वी के नाम (भू, कु, अवनि, महि, ––––), चन्द्रमा के नाम (चन्द्र, इन्दु, शशि, ––––), क्षमा, उक्ता

2 द्वौ, युगल, युग्म, युत, नेत्र के नाम (नेत्र, नैन, लोचन, अक्षि, दृक्, ––––),यम के नाम (यम, अतंक, ––––), अश्विनौ, दस्र, पक्ष, हाथ के नाम(हस्त, कर, बाहु, ––––), अत्युक्ता

3 त्रीणि, लोक, राम, गुण, क्रम, शिव नेत्र, अग्नि के नाम (हुताशन, अग्नि, अनल, पावक, दहन, बह्नि, शिखि, –––––) मध्या

4 चत्वारि, युग, वेद, श्रुति, कृत, अष्टका, समुद्र के नाम (सागर, अब्धि, जलधि, अम्बुधि, अणवि,–––––) प्रतिष्ठा

5 पंच, प्राण, इन्द्रिय, तत्व, भूत, विषय, वाण के नाम (शर, इषु, सायक, अक्ष, ––––)अक्षि, अर्थ, सुप्रतिष्ठा

6 षट्, रस, अंग, ऋतु, ऊनशैल, अर्त्तव, तर्क, शत्रु के नाम (अरि, रिपु, ––––), गायत्री

7 सप्त, स्वर, आद्रि, ऋषि, (मुनि), शैल के नाम (अचल, नग, कुभृत, गिरि, भूभृत, भूधर, क्षमाधर, -----) अश्व के नाम (तुरग, हय, -----), उष्णिक
8 अष्ट, वसु, गज के नाम (दन्ती, करी, कुंजर, -----), सर्प के नाम (नाग, अहि, वारण, व्याल, सिन्धुर, भुजंग, इभा, कुम्भि, -----) द्विय, अनुष्टुप्
9 नव, नन्द, अंक, गो, ग्रह, खेचर, छिद्र के नाम (छिद्र, रन्ध्र, विवर, अंतर, ----) वृहती
10 दश, पंक्ति, दिशा के नाम (दिक्, काष्ठा, -----),
11 एकादश, शिव के नाम (रूद्र, ईश, मदनारि, भव, ----), भग, त्रिष्टुप्
12 द्वादश, सूर्य के नाम (रवि, अर्क, सूर्य, दिवाकर, तिग्मकर, आदित्य, मित्र, ----) जगती
13 त्रयोदश, विश्वेदेव के नाम (विश्व, -----), ऊनशक्र, अति जगती
14 चतुर्दश, मनु, इन्द्र के नाम (शक्र, इन्द्र, सुरराज, ----) शक्वरी
15 पंचदश, दिन्, तिथि, ----- अतिशक्वरी
16 षोडश, अष्टि, राजा के नाम (नृप, भूप, ----), संस्कार,
17 सप्तदश, अत्यष्टि, ऊनधृति, घन,
18 अष्टादश, धृति, पुराण
19 ऊनविशंति, अतिधृति (विधृति)
20 विशंति, कृति, नख के नाम (नख, करज, -----)
21 एकविशंति, मूर्छना, स्वर्ग, प्रकृति
22 द्वाविशंति, आकृति
23 त्रयोविशंति, विकृति
24 चतुर्विशंति, जिन, सिद्ध, अर्हत्, संकृति
25 पंचविशंति, तत्वा, अतिकृति, अभिकृति
26 षड्विशंति, उत्कृति
27 सप्तविंशति, नक्षत्र के नाम (भ, नक्षत्र, तारा, ----)
28 अष्टाविंशति,
29 ऊनविंशत्
30 त्रिंशत्
31 एकत्रिंशत, ऊनरद्
32 द्वात्रिंशत, दॉत के नाम (दन्त, रद् , दशन, ----)
33 त्रयस्त्रिंशत्, देवता के नाम (विवुध, देव, अमर, सुद, ----)
360 भाश, चक्रांश, भगणांश 720 तिथिभोग 800 भभोग
1800 एक शशिकला
21600 चक्रकला, भगणकला, अचक्रकला, अहोरात्रासु

भिन्नात्मक संख्यायें

½ अर्द्ध, दल ⅓ त्रिलव ¼ चतुर्थांश, पाद, चरण, अंध्रि

गणित के सूत्र "अंकानां वामतो गतिः" का उपयोग किया जाता है भास्कराचार्य ने अपने ग्रन्थों में बड़ी बड़ी संख्याओं को मुखस्थ करने हेतु शब्द कूटांक का उपयोग उपर्युक्त शब्दावली का प्रयोग करते हुये किया है। लीलावती {4} के द्वितीय खण्ड में वृत्त का विचार करते हुये कहा है कि

"व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते खबाणसूर्य्यैः परिधिः स सूक्ष्मः ।
द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथ शैलैः स्थूलोऽथवा स्यात् व्यवहारयोग्यः ।।41।।"

इस श्लोक का तात्पर्य है कि "व्यास में भनन्दाग्नि अर्थात् 3927 (भ = 27, नन्द = 9, अग्नि = 3) का गुणा करके तथा खबाणसूर्यै अर्थात् 1250(ख =0,बाण = 5,सूर्य = 12) से विभाजित करने पर वृत्त की सूक्ष्म परिधि प्राप्त हो जाती है। व्यास में 22 से गुणा करके तथा शैल अर्थात् 7 से विभाजित करने पर व्यवहार योग्य स्थूल परिधि प्राप्त होती है।"

"व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने सूक्ष्मं फलं पंचसहस्त्रभक्ते।
रूद्राहते शक्रह्यतेऽथवा वा स्यात्स्थूलं फलं तद्वयवहार योग्यम् ।।43।।"

इसका अर्थ है कि "व्यास के वर्ग में भनवाग्नि अर्थात 3927 (भ = 27, नव = 9, अग्नि = 3) से गुणा करके तथा 5000 से विभाजित करने पर वृत्त का सूक्ष्म क्षेत्रफल प्राप्त होता है। व्यास के वर्ग में रूद्र अर्थात 11 से गुणा करके तथा शक्र अर्थात 14 से विभाजित करने पर वृत्त का स्थूल क्षेत्रफल प्राप्त होता है।"

उपरिलिखित दोनों श्लोकों से सुस्पष्ट है कि वृत्त की परिधि एवं व्यास का अनुपात अर्थात् π (पाई) का सूक्ष्म मान 3927/1250 एवं स्थूल मान 22/7 होता है।

वृत्तान्तर्गत समत्रिभुज से लेकर समनवभुज की भुजा ज्ञात करने हेतु कहा है कि

"त्रिद्वि अंकाग्निनभश्चन्दै स्त्रिबाणाष्टयुगाष्टिभिः।
वेदाग्निबाणखाश्वैश्च खखाभ्राभ्ररसै क्रमात् ।।46।।
बाणेषुनखबाणैः च द्विद्विनन्देषुसागरैः।
कुरामदशवेदैश्च वृत्ते व्यासे समाहते ।।47।।
खखखाभ्रार्क सम्भक्ते लभ्यंते क्रमशो भुजाः
वृत्तान्तस्त्र्यस्रपूर्वाणां नवास्रान्तं पृथक्पृथक् ।।48।।

इन श्लोकों का अभिप्राय है कि "वृत्त के अन्दर समत्रिभुज, समचतुर्भुज, समपंचभुज, समषडभुज, समसप्तभुज, समअष्टभुज एवं समनवभुज की भुजा ज्ञात करने के लिये व्यास को खखखाभ्रार्क अर्थात 120000 (ख = अभ्र = 0, अर्क = 12) से विभाजित करें। प्रत्येक की भुजा की गणना करने हेतु भागफल में क्रमशः त्रिद्विअंकाग्निनभश्चन्द्रैः अर्थात् 103923 (त्रि = 3, द्वि = 2, अंक = 9, अग्नि = 3, नभ = 0, चन्द्र = 1), त्रिबाणाष्टयुगाष्टभिः अर्थात् 84853 (त्रि = 3, बाण = 5, अष्ट = 8, युग = 4, अष्ट = 8), वेदाग्निबाणखाश्वैः अर्थात 70534 (वेद = 4, अग्नि = 3, बाण = 5, ख = 0, अश्व = 7), खखाभ्राभ्ररसैः अर्थात् 60000 (ख = अभ्र =0, रस = 6), बाणेषुनखबाणैः अर्थात् 52055 (बाण = इषु =5, नख = 20), द्विद्विनन्देषुसागरैः अर्थात् 45922 (द्वि = 2, नन्द = 9, इषु = 5, सागर = 4) एवं कुरामदशवेदैः अर्थात् 41031 (कु = 1, राम = 3, दश = 10, वेद = 4) से

गुणा किया जाता है, जिससे अभीष्ट भुजा प्राप्त होती है। भास्कराचार्य ने सिद्धान्त शिरोमणि {5}के काल मान अध्याय में कहा है कि

"खखाभ्रदन्तसागरैर्युगाग्नियुग्मयभूगुणैः।
क्रमेण सूर्यवत्सरैः कृतादयो युगाङघ्रयः ।।21।।"

इस श्लोक का तात्पर्य है कि सतयुग, त्रेतायुग, द्वापरयुग एवं कलियुग में खखाभ्रदन्तसागरै अर्थात 432000 (ख = अभ्र = 0, दन्त = 32, सागर = 4) के क्रमशः युग अर्थात् चार गुना, अग्नि अर्थात तीन गुना, युग्म अर्थात दो गुना एवं भू अर्थात एक गुना वर्ष होते हैं। अर्थात सतयुग में 1728000 वर्ष, त्रेतायुग में 1296000 वर्ष, द्वापरयुग में 864000 वर्ष एवं कलियुग में 432000 वर्ष होते हैं। सृष्टिकाल का विचार करते हुये कहा है कि

याताः षण्मनवो युगाग्नि भमितान्यन्यद्युगाङ्घ्रत्रयं
नन्दाद्रीन्दुगुणास्तथा शकनृपस्यान्ते कलेर्वत्सराः
गोद्रीन्द्वद्रिकृतांकदस्रनगगोचन्द्राः शकाब्दान्विताः
सर्वे संकलिताः पितामहदिने स्युर्वत्तमाने गताः ।।28।।

इस श्लोक का भावार्थ है कि सृष्टि के प्रारम्भ से अब तक छः मनु, सत्ताईस युग, तीन युगपाद एवं 3179 (नन्दाद्रीन्दुगुणाः) वर्ष व्यतीत हो चुके हैं। सृष्टि के प्रारम्भ से अब तक कुल 1972947179 (गोद्रीन्द्वद्रिकृतांकदस्रनगगोचन्द्राः) वर्ष व्यतीत हो चुके हैं। भगणाध्याय में विविध ग्रहों के कल्प में भगणादि की चर्चा करते हुये कहा है कि

अर्क शुक्रबुधपर्यया विधेरहि कोटिगुणिता रदाब्धयः।
एत एव शनिजीवभूभुवां कीत्तिताश्च गणकैश्चलोच्चजाः।।1।।
खाभ्रखाभ्रगगनामदेन्द्रियक्ष्माधराद्रिविषया हिमद्युतेः।
युग्मयुग्मशरनागलोचनव्यालषण्नवयमाश्विनोऽसृजः।।2।।
सिन्धुसिन्धुरनवाष्ठगोऽकषट्त्र्यंकसप्तशशिनो सशीघ्रुजाः।
पंचपंचयुगषट्कलोचनद्विअब्धिषड्गुणामिता गुरोर्मताः ।।3।।
द्विनन्दवेदांकगजाग्निलोचनद्विशून्यशैलाः सितशीघ्रपर्ययाः।
भुजंगनन्दनद्विनगांकबाणषट्कृतेन्दवः सूर्यसुतस्य पर्ययाः ।।4।।

इन श्लोकों का अर्थ है कि "सूर्य, शुक्र एवं बुध के भगण 4320000000 (कोटि गुणिता रदाब्धयः)होते हैं। चन्द्रमा के भगण 57753300000 (खाभ्रखाभ्रगगनामरेन्द्रियक्ष्मरधरर्गद्रिविषया) हैं। मंगल ग्रह के भगण 22968285222 (युग्मयुग्मशरनागलोचनव्यालषण्नवयमाश्विनो) हैं। बुध के शीघ्रेच्च भगणों की संख्या 17936998944 (सिन्धुसिन्धुरनवाष्ठगोऽकषट्त्र्यंकसप्तशशिना) हैं। वृहस्पति के भगण

364226455 (पंचपंचयुगषट्कलोचनद्विअब्धिषड्गुणामिता) हैं। शुक्र के शीघ्रोच्च भगणों की संख्या 7022389492 (द्विनन्दवेदांकगजाग्निलोचनद्विशून्यशैलाः) हैं। शनि के भगण 146569298 (भुजंगनन्दनद्विनगांकबाणषट्कृतेन्दवः) हैं।

इसी प्रकार चन्द्रोच्च, चन्द्रपात एवं पृथ्वी के भगणों की चर्चा करते हुये कहा है कि

खाष्टाब्धयोऽष्टांक्षगजेषुबुयिग्द्वियद्विचाब्धयो द्विमंकयमा रदाग्नयः।
शरेष्विभाः व्यक्षरसाःकुसागराः स्युः पूर्वगत्या तरणेर्मृदच्चजाः।।5।।
गजाष्टिभर्गत्रिरदाश्विनः कुभृद्रसाश्विनः कुद्विशराःक्रमर्न्तवः।
त्रिनन्दनागायुगकुंजरेषवो निशाकराद् व्यस्तगपालपर्ययाः ।।6।।
खखेषुवेदषड्गुणाकृतीभिभूतभूमयः शताहता।
भर्याश्चिमभ्रमा भवन्ति काहनि।।7।।

इन श्लोकों का अभिप्रायः है कि चन्द्रोच्च की भगण संख्या 488105858 (अष्टाक्षगजेषुबुयिग्द्वियद्विचाब्धयो) है। चन्द्रपात की भगण संख्या 232311168 (गजाष्टिभर्गत्रिरदाश्विनः) है। पृथ्वी के भगण 1582236450000 (खखेषुवेदषड्गुणाकृतीभिभूतभूमयः) हैं।

1.ग.3 व्यंजन कूटांक (Consonant Numerical Code) :

अंकों को देवनागरी वर्णमाला के व्यंजनों के रूप में अथवा व्यंजनों को अंकों के रूप में अभिव्यक्त करके गणित की गणनाओं संबंधी जटिलताओं को अत्यन्त सरल, सहज एवं बोधगम्य बनाया जा सकता है। अंकों को व्यंजनों के रूप में व्यक्त करना "व्यंजन कूटांक" कहलाता है। यह कटपयादि सूत्रों के नाम से जाना जाता है, यह निम्नवत् हैः–"कादि नव टादि नव पादि पंचक याद्यष्टक्र क्षः शून्यम् च" इसका अभिप्राय है "क आदि नव, ट आदि नव, प आदि पंच, य आदि अष्ट और क्ष शून्य है"। उसको निम्नवत् अभिव्यक्त किया जाता हैः–

1	क	ट	प	य
2	ख	ठ	फ	र
3	ग	ड	ब	ल
4	घ	ढ़	भ	व
5	ङ.	ण	म	श
6	च	त		ष
7	छ	थ		स
8	ज	द		ह
9	झ	ध		
0	ञ	न		क्ष(क्षुद्र)

उपर्युक्त विवेचन से सुस्पष्ट है कि अर्द्धाक्षर एवं मात्राओं को कूटांक के रूप में प्रयुक्त नहीं किया गया है। कटपयादि के विषय में "कटपयवर्गभवैरिह पिण्डान्त्यैरक्षरैरंकाः
नत्रि च शून्यं श्रेयं तथा स्वरे केवले कथितम।"

कूटांक का उपयोग {6–15} अधोलिखित हैः–

1. आवर्त दशमलव : विभिन्न आवर्त दशमलों की गणना अत्यन्त सरलता से की जा सकती है।

(अ) 1/7 का मान ज्ञात करने के लिये "केवलैः सप्तकं गुण्यात्" का प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर "केवल" को कूटांक के रूप में प्रयोग किया गया है जिसका अर्थ है "143" । 143 में समान अंकों की संख्या जो कि मात्र अंक 9 से बनी हो, का गुणा करने पर 1/7 से प्राप्त होने वाला आवर्त दशमलव प्राप्त हो जाता है। यथा $1/7 = 143 \times 999 = 0.\dot{1}42\ 85\dot{7}$
"एकन्यूनेन पूर्वेण से"

(आ) 1/13 का मान ज्ञात करने के लिये "कलौ क्षुद्रससैः" का प्रयोग किया जाता है। "कलौ" का तात्पर्य है "13" तथा "क्षुद्रससैः" का अर्थ है "077", अतः 077 में 999 से गुणा करने पर 1/13 का मान ज्ञात हो जाता है। यथा $1/13 = 077 \times 999 = 0.\dot{0}76\ 92\dot{3}$

(इ) 1/17 का मान ज्ञात करने के लिये "कंसे क्षामदाहखलैर्मलैः" का प्रयोग किया जाता है। "कंसे" का अभिप्राय है "17" तथा "क्षामदाहखलैर्मलैः" का अर्थ है "05882353"। अतः 05882353 में 99999999 से गुणा करने पर 1/17 का मान ज्ञात हो जाता है।
यथा $1/17 = 05882353 \times 99999999 = 0.\dot{0}5882352\ 9411764\dot{7}$

2. (अ) $\pi/10$ का मान :

$\pi/10$ का दशमलव के बत्तीस स्थानों तक शुद्ध मान ज्ञान करने के लिये अधोलिखित श्लोक दर्शनीय हैः– "गोपीभाग्यमधुव्रात श्रंगिशोदधिसन्धिग।
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3
खलजीवितखाताव गलहालारसंधर।।"
2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 2

$\pi/10 =$ 0.31415926535897932384626433832792

इस प्रकार अंकों के लम्बे व्यंजकों को सरलता से कंठस्थ किया जा सकता है तथा उचित अवसर पर उनका उपयोग भी किया जा सकता है।

(आ) π का मान : अधोलिखित श्लोक का कूटांक की दृष्टि से विचार करें–

"चन्द्रांशु चंद्रा धमकुंभिपाल।
आनूननून्नानन नुन्न नित्यम।।"

इसका अभिप्राय है कि "आनूननून्नानन नुन्न नित्यम" व्यास के वृत्त की परिधि "चन्द्रांशु चंद्रा धमकुंभिपाल" होती है।

व्यास = 1 आनूननून्नानन नुन्न नित्यम्

000000 000 01

परिधि = चन्द्रांशु चंद्रा धमकुंभि पाल

6 3 5 62 9514 13

π = परिधि / व्यास = 31415926536 / 10000000000 = 3.1415926526

अर्थात दशमलव के दस स्थानों तक π का मान इस श्लोक में दिया गया है तथा कूटांक को दायें से बायें प्रयुक्त किया गया है। महर्षि जैमिनि ने ज्योतिष के प्रसिद्ध फलित ग्रन्थ जैमिनि सूत्रम {16–17} में व्यंजन कूटांक का उपयोग करते हुये विभिन्न सूत्रों की रचना की है।

दारभाग्यमशूलस्थार्गलानिध्यातुः ।। प्रथम पाद ।5 ।।

दार = 28, भाग्य = 14, शूल = 35 (4,2,11)

कर्मणि पापे शूरः ।। शुभे कातरः ।।

मृत्युचिन्तयोः पापे कर्षकः ।। द्वितीय पाद । 64–66 ।।

कर्म = 51, मृत्यु = 15, चिन्त = 66 (3,3,6)

1.ग.4 वर्ण कूटांक (Letter Numerical Code) :

देवनागरी लिपि के आकार रहित व्यंजनों क् से म् को एक से लेकर पच्चीस तक की संख्याओं, य् से ह् तक 100 तक की दश गुणित संख्याओं के रूप में तथा स्वरों को दशघातीय संख्याओं के रूप में व्यक्त करना "वर्ण कूटांक" कहलाता है। श्लोक निम्नवत् हैः–

वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः।

खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गेनवान्त्यवर्गे वा ।।

इस श्लोक का भावार्थ है कि क् से प्रारम्भ करके वर्ग अक्षरों को वर्ग स्थानों में और अवर्ग अक्षरों को अवर्ग स्थानों में प्रयोग करना चाहिये। इस प्रकार ङ् और म् मिलकर (ङ्+म्) म् होते हैं। वर्ग और अवर्ग स्थानों के नव के इन शून्यों को नव स्वर व्यक्त करते हैं। नव वर्ग स्थानों एवं नव अवर्ग स्थानों के पश्चात अर्थात इनसे अधिक स्थानों के उपयोग की आवश्यकता होने पर इन्हीं नव स्वरों का उपयोग करना चाहिये। इसको निम्नवत् अभिव्यक्त किया जाता हैः–

शतपर्यन्त संख्यायें

क्	ख्	ग्	घ्	ङ्
1	2	3	4	5
च्	छ्	ज्	झ्	ञ्
6	7	8	9	10
ट्	ठ्	ड्	ढ्	ण्
11	12	13	14	15
त्	थ्	द्	ध्	न्
16	17	18	19	20
प्	फ्	ब्	भ्	म्
21	22	23	24	25
य्	र्	ल्	व्	
30	40	50	60	
श्	ष्	स्	ह्	
70	80	90	100	

अइउण्।. ऋलृक। एओङ्। ऐऔच्। अर्थात अ, इ, उ, ऋ, लृ, ए, ऐ, ओ, तथा औ नव स्वर हैं। इन स्वरों का उपयोग नव वर्ग और नव अवर्ग स्थानों को प्रकट करने के लिए करना है।

कूटांक का प्रयोग करते समय निम्न बातें ध्यान में रखी जाती हैं।

(क) अर्द्धाक्षरों के मानों को जोड़ा जाता है।

(ख) किसी व्यंजन की मात्रा ही पूर्व प्रयुक्त अर्द्धाक्षर की मात्रा होती है।

(ग) दशघातीय संख्याओं का गुणन किया जाता है।

आर्यभट ने आर्यभटीय {18–19} के 'दशगीतिका' प्रकरण में विभिन्न गणनाओं में प्रयुक्त होने वाली बड़ी–बड़ी संख्याओं को कूटांक रूप में अभिव्यक्त किया है। विभिन्न ग्रहों के युग में भगणों की संख्या की चर्चा करते हुये आर्यभट ने कहा है कि –

युगरविभगणाः ख्युघृ शशि चयगियिङुशुछ्लृ कुडि.शिबुणलृख्षृ प्राक्।
शनि ढुङ्वि.वघ्व गुरू ख्रिच्युभ कुज भद्लिझ्नुखृ भृगुबुधसौराः ।।1।।
चन्द्रोच्चं ज्रुष्खिध बुध सुगुशिथृन भृगु जषबिखुछृ शेषार्काः।
बुफिनच पातविलोमा बुधाह् न्यजार्कोदयाच्च लंकायाम् ।।2।।

इन श्लोकों का अभिप्राय है कि 'युग में सूर्य के भगणों की संख्या ख्युघृ अर्थात् {(ख्+य्) X उ + घ् X ऋ} अथवा {(2+30) 10^4 + 4X10^6} या (32 X 10^4 + 4 X 10^6} अथवा 4320000 है।'

चन्द्रमा की भगण संख्या चयगियिङुशुछ्लृ अर्थात {च् X अ + य् X अ + ग् X इ + य् X इ + ङ् X उ + श X उ + (छ्+ल्) X ऋ} अथवा {6 X 1 + 30 X 1 + 3 X 10^2 + 30 X 10^2 + 5 X 10^4 + 70 X 10^4 + (7+50) X 10^6} या 57753336 है'।

कु अर्थात पृथ्वी पूर्व की ओर ङिशिबुणलृख्षृ अर्थात {ङ् x इ + श् x इ + ब् x उ + ण् + लृ + (ख् + ष्) x ऋ} अथवा 5 x 10^2 + 70 x 10^2 + 23 x 10^4 + 15 + 10^8 + (2 + 80) x 10^6} अर्थात 1582237500 बार घूमती हैं।

शनि के भगणों की संख्या ढुङिवघ्व अर्थात {ढ् x उ + (ङ् + व्) x इ + (घ् + व्) x अ} अर्थात {14 x 10^4 + (5+60) x 10^2 + (4+60) x 1} या 146564 है। गुरू अथवा वृहस्पति की भगण संख्या ख्रिच्युभ अर्थात् {(ख् + र्) x इ + (च् +य्) x उ + भ् x अ} अथवा {(2 + 40) x 10^2 + (6 + 30) x 10^4 + 24} या 364224 है। कुज अथवा मंगल के भगणों की संख्या भद्लिझ्नुखृ अर्थात {भ् x अ + (द् + ल्) x इ + (झ् + न्) x उ + ख् x ऋ} या {24 x 1 + (18 + 50) x 10^2 + (9 + 20) x 10^4 + 2 x 10^6} अथवा 2296824 है। भृगु अर्थात शुक्र एवं बुध के भगणों की संख्या सूर्य की भांति होती है।

चन्द्रोच्च की भगण संख्या ज्रुष्खिध अथवा {(ज्+र्) x उ + (ष्+ख्) x इ + ध् x अ} अर्थात् {(8+40) x 10^4 + (80+2) x 10^2 + 19 x 1} अथवा 488219 है। बुध के शीघ्रोच्च की भगण संख्या सुगुशिथृन अर्थात (स् x उ + ग् x उ + श् x इ + थ् x ऋ + न् x अ} अथवा {90 x 10^4 + 3 x 10^4 + 70 x 10^2 + 17 x 10^6 + 20 x 1) या 17937020 है। शुक्र के शीघ्रोच्च की भगण संख्या जषबिखुछृ अथवा (ज् x अ + ष् x अ + ब् x इ + ख् x उ + छ् x ऋ) या (8 x 1 + 80 x 1 + 23 x 10^2 + 2 x 10^4 + 7 x 10^6) अर्थात 7022388 है। शेष अर्थात मंगल, गुरू एवं शनि के शीघ्रोच्च भगणों की संख्या सूर्य के भगणों की संख्या के समान होती है। चन्द्रपात के भगणों की संख्या विलोम अर्थात पूर्व से पश्चिम की ओर बुफिनच अथवा (ब् x उ + फ् x इ + न् x अ + च् x अ) या (23 x 10^4 + 22 x 10^2 + 20 x 1 + 6 x 1) अर्थात 232226 है। ये भगण युग के आरम्भ में बुध के दिन लंका में सूर्योदय के समय से मेष राशि के प्रारम्भ से दिये गये हैं।।2।।

काल गणना करते हुये कहा है कि–

'काहो मनवो ढ मनुयुग श्ख गतास्ते च मनुयुग छ् ना च।
कल्पादेर्युगपादा ग च गुरूदिवसाच्च भारतीत्पूर्वम् ।।3।।

इस श्लोक का अभिप्राय है कि 'ब्रह्मा के एक दिन में अर्थात एक कल्प में ढ अर्थात (ढ् x अ) या 14 मनु होते हैं और एक मन्वन्तर में श्ख अर्थात {(श् + ख्) x अ} या {(70 + 2) x 1}

अथवा 72 युग होते हैं। कल्प के प्रारम्भ से महाभारत युद्ध के अन्तिम दिवस वृहस्पतिवार तक च अर्थात (च् X अ) या (6 X 1) अथवा 6 मनु, छ्ना अर्थात {(छ् + न्) X अ} या {(7 + 20) X 1}अथवा 27 युग तथा ग् अर्थात (ग् X अ) या (3 X 1) अथवा 3 युगपाद बीत गये थे।।3।।

ज्यौतिषादि गणनाओं के सन्दर्भ में कहा है कि –

'शशि राशयष्ठ चक्रं तेंऽशकलायोजनानि य व ञ गुणाः।
प्राणेनैति कलां भूः खयुगांशे ग्रहजवो भवांशेऽर्कः।।4।।

इस श्लोक का भावार्थ है कि 'चन्द्रमा की भगण संख्या को ठ अर्थात (ठ् X अ) या (12 X 1) अथवा 12 से गुणा करने पर राशियों की संख्या प्राप्त होती है। इसको य अर्थात (य् X अ) अथवा (30 X 1) या 30 से गुणा करने पर अंश प्राप्त होते हैं। अंशों की संख्या को व अथवा (व् X अ) या (60 X 1) अर्थात 60 से गुणा करने पर कलाओं की संख्या मिलती है तथा कलाओं की संख्या को ञ अथवा (य् X अ) या (10 X 1) अथवा 10 से गुणा करने पर आकाश का कक्ष्या मान योजन में प्राप्त होता है। एक प्राण के तुल्य समय में पृथ्वी एक कला घूमती है। आकाश कक्ष्या को युग के सावन दिनों से भांग देने पर ग्रहों की दैनिक गति प्राप्त हो जाती है। भकक्ष्या अर्थात नक्षत्र कक्ष्या का 'व' अंश अर्थात 60वां अंश सूर्य की कक्ष्या होती है ।।4।।

इस प्रकार एक चक्र = 12राशि = (12 X 30) या 360 अंश = (360 X 60) या 21600 कला = (21600 X 10) या 216000 योजन। आर्यभट के अनुसार एक दिन = 60 नाड़ी या 3600 विनाड़ी = 21600 प्राण।

विभिन्न ग्रहों के व्यास के विषय में कहा है कि –

'नृषियोजनं ञिला भूव्यासोऽर्केन्द्वोर्घ्रिञागिणि क मेरोः।
भृगुगुरूबुधशनिभौमाश्शशि ङञणनमांशकास्समार्कसमाः।।5।।

इस श्लोक का अर्थ है कि 'षि अर्थात (ष् X इ) या (80×10^2) अर्थात 8000 नृ या नर के तुल्य एक योजन होता है। पृथ्वी का व्यास ञिला अर्थात (ञ् X इ + ल् X अ) अथवा ($10 \times 10^2 + 50 \times 1$) या 1050 योजन होता है। सूर्य का व्यास घ्रिञ अर्थात {(घ् + र्) X इ + ञ् X अ} या {$(4 + 40) \times 10^2 + 10 \times 1$} अथवा 4410 योजन है। चन्द्रमा का व्यास गिण अथवा (ग् X इ + ण् X अ) या ($3 \times 10^2 + 15 \times 1$) अर्थात 315 योजन होता है। मेरू का व्यास क अर्थात (क् X अ) या (1 X 1) अथवा एक योजन है। शुक्र, वृहस्पति, बुध , शनि एवं मंगल के व्यास चन्द्रमा के

व्यास के क्रमशः ङ., ञ, ण, न एवं म गुना अर्थात 5, 10, 15, 20 तथा 25 गुने हैं। युग के वर्षो की संख्या सूर्य के भगणों की संख्या के समान होती है। ।5।।

विभिन्न ग्रहों के विक्षेपादि की चर्चा करते हुये कहा है कि –

'भापक्रमो ग्रहांशाश्शशिविक्षेपोऽपमण्डलाज्झार्ध।
शनिगुरूकुज खकगार्धं भृगुबुध ख स्चाङ.गुलो घहस्तो ना।।6।।

इस श्लोक का अर्थ है कि 'विषुवत वृत्त से ग्रहों का अपक्रम भ अथवा (भ् x अ) या 24 अंश है अर्थात रवि आदि ग्रह विषुवत वृत्त से 24 अंश उत्तर या दक्षिण जाते हैं। अपमण्डल अर्थात कान्तिवृत्त से चन्द्रमा का विक्षेप अथवा शर झ का आधा अर्थात (झ् x अ)/2 अथवा (9 x 1)/2 अर्थात साढ़े चार अंश होता है। शनि, गुरू एवं मंगल का विक्षेप क्रमशः ख, क एवं ग/2 अंश अर्थात 2, 1 एवं 1 1/2 अंश है। शुक्र एवं बुध के विक्षेप ख अंश अर्थात 2 अंश है। नर स्च अर्थात (स्+च्) x अ या (90 + 6) x 1 या 96 अंगुल अथवा घ अर्थात 4 हाथ का होता है।।6।।

विभिन्न ग्रहों के गमनादि के प्रथम पात एवं मन्द्रोच्च का विचार करते हुये कहा है कि–

'बुध भृगुकुजगुरुशनि नवराषह गत्वांशकान्प्रथमपाताः।
सवितुरमीषांच तथा द्वा ञखि सा ह्दा ह्रय खिच्य मन्दोच्यं ।।7।।

इस श्लोक का अभिप्राय है कि 'बुध, शुक्र, मंगल, गुरू एवं शनि ग्रहों के प्रथम पात मेषादि से गमन करके क्रमशः न, व, र, ष एवं ह अंशों अर्थात 20, 60, 40, 80 एवं 100 अंशों पर स्थित है। सूर्य का मन्दोच्च द्व अर्थात (द् + व्) x अ या 78 अंश, बुध का मन्दोच्च ञखि अर्थात (ञ् x अ + ख् x इ) या 10 x 1 + 2 x 10^2) या 210 अंश, शुक्र का मन्दोच्च स अर्थात (स् x अ) या (90 x 1) या 90 अंश, मंगल का मन्दोच्च ह्रद या (ह् + द्) x अ अथवा (100 + 18) x 1 या 118 अंश गुरू का मन्दोच्च ह्रय या {(ह् + ल्) x अ + य् x अ} या {(100 +50) x 1 + 30 x 1} या 180 अंश तथा शनि का मन्दोच्च खिच्य अर्थात {ख x इ + (च + य) x अ} या { 2 x 10^2 + (6 +30) x 1} या 236 अंश पर स्थित है। ।।7।।

विभिन्न ग्रहों की परिधियों का उल्लेख करते हुये कहा है कि–

झार्धानित्तं मन्दवृ शशिनश्छ गछघढछझ यथोक्तेभ्यः।
झ ग्ड ग्ल झ्ल द्ड तथा शनिगुरूकुजभृगुबुधोच्चशीघ्रेभ्यः।।8।।
मन्दात ङ. खदजडा वक्रिणां द्वितीये पदे चतुर्थे च।
जाण क्ल छ्ल झ्नोच्चाच्छीघ्रात् गियिङश कुवायु कक्ष्यान्त्या ।।9।।

इन श्लोकों का भावार्थ है कि 'झ के आधे अर्थात 9 के आधे अर्थात 4 1/2 से विभाजित करने पर चन्द्रमा के मन्दवृत्त की परिधि प्रथम तथा तृतीय पद में छ अर्थात 7 है। सूर्य, बुध, शुक्र, मंगल, गुरू एवं शनि के मन्दवृत्त की परिधि प्रथम तथा तृतीय पद में क्रमशः ग, छ, घ, ढ, छ एवं झ अर्थात 3, 7, 4, 14, 7 एवं 9 हैं। शनि, वृहस्पति, मंगल, शुक्र एवं बुध की शीघ्र परिधि प्रथम तथा तृतीय पद में क्रमशः झ, ग्ल, ग्ड, झ्ल तथा दृड अर्थात 9, 16, 53, 59 तथा 31 हैं।।8।। मन्दगति के कारण द्वितीय तथा चतुर्थ पदों में बुध, शुक्र, मंगल, वृहस्पति एवं शनि की परिधि क्रमशः ड., ख, द, ज ,डा अर्थात 5, 2,18, 8 एवं 13 हैं। शनि, वृहस्पति, मंगल, शुक्र तथा बुध की शीघ्र परिधि क्रमशः जा, ण, क्ल, छ्ल एवं झन अर्थात 8, 15, 51, 57 एवं 29 हैं। भूवायु कक्षा मान गियिङश अर्थात (ग् x इ + य् x इ + ङ् x अ + श् x अ) या (3 x 10^2 + 30 x 10^2 + 5 x 1 + 70 x 1) या 3375 योजन है।।9।।

कलाओं में अर्द्धज्याखण्डों का विचार करते हुये कहा है कि

'मखि भखि फखि धखि णखि ञखि ङ्खि हस्झ स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व।

घ्लकि किग्र हक्य धकि किच स्ग श्झ ङ्व ल्क प्त फ छ कलार्धज्याः ।।10।।'

इस श्लोक में अर्द्धज्याखण्डों के मान $3^0$45' के अन्तर पर दिये गये हैं। इनसे क्रमज्या तथा उत्क्रमज्या दोनों ही प्राप्त हो सकते हैं। उत्क्रमज्या प्राप्त करने के लिये इन खण्डों को उल्टे क्रम में लेना पडता है। कलाओं के रूप में अर्द्धज्याखण्डों के मान मखि अर्थात (म् x अ + ख् x इ) या (25 x 1 + 2 x 10^2) अर्थात 225, भखि अर्थात (भ् x अ + ख् x इ) या (24 x 1 + 2 x 10^2) अर्थात 224, फखि अर्थात (फ् x अ + ख् x इ) या (22 x 1 + 2 x 10^2) अर्थात 222, धखि अर्थात (ध् x अ + ख् x इ) या (19 x 1 + 2 x 10^2) अथवा 219, णखि अर्थात (ण् x अ + ख् x इ) या (15 x 1 + 2 x 10^2) या 215, ञखि अर्थात (ञ् x अ + ख् x इ) या (10 x 1 + 2 x 10^2) अथवा 210, ड.खि अर्थात (ङ् x अ + ख् x इ) या (5 x 1 + 2 x 10^2) अर्थात 205, हस्झ अर्थात {(ह् x अ +(स् + झ्) x अ) या (100 x 1 + (90 + 9) x 1)} अथवा 199 स्ककि अर्थात {(स् + क्) x अ + क् x इ} या (90 + 1) x 1 + 1 x 10^2} अर्थात 191, किष्ग अर्थात { क् x इ + (ष् + ग्) x अ} या {1 x 10^2 + (80+3) x 1} अर्थात 183, श्घकि अथवा {(श् + घ्) x अ + क् x इ} या {(70+4) x 1 +1x 10^2} अर्थात 174 किघ्व अर्थात {क् + इ) + (घ् + व्) x अ } या {1 x 10^2 + (4 + 60) x 1} अर्थात 164 घ्लकि अर्थात {(घ् + ल्) x अ + क् x इ} या {(4 + 50) x 1+1 x 10^2} अर्थात 154, किग्र अर्थात {(क् x इ) + (ग् + र्) x अ} या {1 x 10^2 +(3

+ 40)} अर्थात 143, हक्य अर्थात {ह् X अ (क् + य्) X अ} या {100 X 1) +1 (1 + 30) X 1} अर्थात 131, धकि अर्थात (ध् X अ + क् X इ} या (19 X 1 + 1 X 10^2) 119, किच अर्थात (क् X इ + च् X अ) या (1 X 10^2 + 6 X 1) या 106, स्ग अर्थात (स् + ग्) X अ या (90 + 3) X 1 या 93, श्झ अर्थात (श् + झ्) X अ अथवा (70 + 9) X 1 या 79, ङ.व अर्थात (ङ् + व्) X अ या (5 + 60) X 1 या 65, ल्क अर्थात (ल् + क्) X अ या (50 + 1) X 1 या 51, प्त अर्थात (प् + त्) X अ या (21 + 16) X 1 या 37, फ अर्थात (फ् X अ) अथवा 22, छ अर्थात 7 हैं।

वर्तमान समय में अर्द्धज्या का मान निकालने के लिये वृत्त के अर्द्धव्यास को एक माना जाता है। आर्यभट ने इसका मान 3438′ इस आधार पर माना है कि वृत्त की परिधि में कुल 21600 कलायें होती हैं । आर्यभट ने वृत्त की परिधि एवं व्यास का अनुपात अर्थात π का मान 3927/1250 अर्थात 3.1416 ज्ञात किया था। π के इस मान से अर्द्धव्यास का मान 3437′44′′19′′′26′′′′ प्राप्त होता है।

1.ग.5 निष्कर्ष (Conclusion) :

हमारे पूर्वज श्रेष्ठ एवं उच्चकोटि के गणितज्ञ थे तथा सामान्य जन को सुलभ भाषा में गणित को प्रस्तुत करते थे। शब्द कूटांक द्वारा व्यक्त संख्या सर्वसाधारण व्यक्ति कंठस्थ कर सकता है। गणितज्ञों, वैज्ञानिकों एवं ज्यौतिषियों की दृष्टि से व्यंजन कूटांक अत्यंत उपयोगी हैं। संगणक वैज्ञानिकों के लिये वर्ण कूटांक अमूल्य धरोहर है, जिसकी उपादेयता प्रयत्नों की पराकाष्ठा से स्वयं सिद्ध है।

1.ग.6 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} सुरेश सोनी, भारत में विज्ञान की उज्जवल परम्परा, अर्चना प्रकाशन, भोपाल (2003)
{2} प्राचीन भारत में विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी, संकलन विज्ञान भारती, मुम्बई (2002)
{3} B.B Dutta & A.N.Singh, History of Hindu Mathmatics, Bhartiya Prakashan, New Delhi, (2001)
{4} लीलावती, कृष्णदास अकादमी, वाराणसी (1993)
{5} सिद्धान्तशिरोमणि, सम्पूर्णानन्द संस्कृत विश्वविद्यालय, वनारस (1991)
{6} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)
{7} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992).
{8} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol.19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.
{9} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.
{10} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.
{11} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।
{12} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
{13} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।
{14} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol.22, Feb. 2005, pp. 17-21.
{15} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol.8, No.3, March 2005, pp. 17-19.
{16} सुरेशचंद्र मिश्र, जैमिनि सूत्रम, रंजन पब्लिकेशंस, नई दिल्ली (1998)
{17} अमित कुमार शर्मा एवं कैलाश, प्राचीन भारतीय वाङ्मय में व्यंजन कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, अगस्त 07, पृ0 88–89।
{18} रामनिवास राय आर्यभट कृत, आर्यभटीय, भारतीय राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी, नई दिल्ली (1976)
{19} अमित कुमार शर्मा एवं कैलाश, प्राचीन भारतीय वाङ्मय में शब्द कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, जून 07, पृ0 101–103।

अध्याय एक (घ)

मापन पद्धतियाँ एवं द्विअंकीय प्रणाली के साक्ष्य
(Evidences of Measuring Systems and Binary System)

1.घ.1 प्रस्तावना (Introduction)

1.घ.2 मापन पद्धतियाँ (Measuring Systems)

1.घ.3 शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के तथ्य

(Facts of Binary System in Ancient Indian Literature)

1.घ.4 निष्कर्ष (Conclusion)

1.घ.5 संदर्भ ग्रन्थ (References)

1.घ.1 प्रस्तावना (Introduction) :

भिन्नात्मक राशि के प्रयोग से बचने के लिये सभी सभ्य देशों में लम्बाई, तौल और मुद्रा आदि की इकाईयों को छोटी इकाईयों में विभाजित करने की सामान्य प्रथा है। इससे वाणिज्य की प्रगति तथा वाणिज्य संबंधी गणित की उत्पत्ति का पता चलता है। भारत में नाप और तौल की पद्धतियों का प्रयोग प्राचीनतम काल से मिलता है। भिन्न भिन्न ग्रन्थों में वर्णित माप और तौल की इकाईयाँ एक दूसरे से भिन्न हैं। ये वे इकाईयाँ हैं {1-2} जो ग्रन्थ रचे जाने के समय उस स्थान में प्रचलित थीं जहाँ ग्रन्थ लिखा गया था। शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के तथ्य भी मिलते हैं। प्रस्तुत लेख का उद्देश्य प्राचीन मापन पद्धतियों एवं शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के प्रमाणों को जनसामान्य के समक्ष प्रस्तुत करना है।

1.घ.2 मापन पद्धतियाँ (Measuring Systems) :

कौटिल्य के अर्थशास्त्र {3} में एक प्रकरण ऐसा है जिसमें चौथी शताब्दी ई0पू0 में भारतवर्ष में प्रयोग की जाने वाली मापों एवं तौलों का विवरण दिया गया है।

(अ) सोने की तौल : सोने की तौल के सम्बंध में कहा गया है–
धान्यमाषा दश सुवर्णमाषकः। पंच वा गुंज। ते षोडष सुवर्णः कर्षो वा। चतुकर्ष पलम।

10 उर्द के दाने या 5 रत्ती = 1 सुवर्णमाषक
16 माष = 1 सुवर्ण या 1 कर्ष
4 कर्ष = 1 पल

(ब) चांदी की तौल : चांदी की तौल के सम्बंध में कहा गया है–
अष्टाशीतिर्गौरसर्षपा रूप्यमाषकः। ते षोडश धरणम्। शैम्ब्यानि वा विंशतिः।

88 सफेद सरसों = 1 रूप्यमाषक
16 रूप्यमाषक या 20 मूली के बीज = 1 धरण

(स) हीरे की तौल : हीरे की तौल के सम्बंध में कहा गया है–
विंशतितण्डुलं वज्र धरणम्।
20 चावल = 1 बज्रधरण

(द) सोना एवं चांदी तोलने के लिये बांट : सोना एवं चांदी तोलने के लिये 14 बांट होने चाहिये एवं उनके निर्माण के क्रम हेतु कहा गया है–

अर्द्धमाषकः, माषकः, द्वौ, चत्वारः, अष्टौ माषकः, सुवर्णो, द्वौ, चत्वारः, अष्टौ सुवर्णाः, दश, विंशतिः, चत्वारिंशत, शतमिति। तेन धरणानि व्याख्यातानि।

सोना तोलने के बांटों का निर्माण इस क्रम से होना चाहिये– आधा माषक, माषक, दो माषक, चार माषक, आठ माषक, सुवर्ण, दो सुवर्ण, चार सुवर्ण, आठ सुवर्ण, दस सुवर्ण,

बीस सुवर्ण, तीस सुवर्ण, चालीस सुवर्ण एवं सौ सुवर्ण सोना तोलने के लिये 14 बांट होने चाहिये। इसी क्रम से चांदी तोलने के लिये धरण एवं रूप्यमाषक बांटों का भी निर्माण होना चाहिये अर्थात धरण, दो धरण, चार धरण, आठ धरण, दस धरण, बीस धरण, तीस धरण, चालीस धरण और सौ धरण एवं अर्द्धमाषक, माषक, दो माषक, चार माषक, आठ माषकः आदि 14 बांटों का क्रम है।

(न) तोलने हेतु तुलाएं : सोना चांदी तोलने हेतु छोटी बड़ी दस तुलाओं के बारे में कहा गया है–

षडंगुलादूर्ध्वमष्टांगुलोन्तराः दश तुलाः कारयेल्लोहपलादूर्ध्वकपलोत्तराः।

यन्त्रमुभयतः शिक्यं वा।

सोना चांदी तोलने के लिये छोटी बड़ी दस तुलायें इस क्रम में होना चाहिये – (1) 6 अंगुल की (2) 6+8= 14 अंगुल (3) 14+8 = 22 अंगुल (4) 22+8= 30 अंगुल (5) 30+8= 38 अंगुल (6) 38+8= 46 अंगुल (7) 46+8= 54 अंगुल (8) 54+8= 62 अंगुल (9) 62+8= 70 अंगुल (10) 70+8= 78 अंगुल की एवं उनका वजन क्रमशः 1 पल से 10 पल तक होना चाहिये। उनके दोनों ओर पलड़े (शिक्य) लगे होना चाहिये। सोना चांदी के अतिरिक्त दूसरे पदार्थो को तोलने के लिये कहा गया है

पंचविंशत्पललोहां द्विसप्तत्यंगुलायायां समवृत्तां कारयेत्। तस्याः पंचपलिकं मण्डलं बद्ध्वा समकरणं कारयेत्। ततः कर्षोत्तरं पलं, फलोत्तरं, दशपलं द्वादश पंचदश विंशतिरिति पदानि कारयेत्। तत् आ शताद् दशोत्तरं कारयेत्। अक्षेषु नद्धीपिनद्धं कारयेत्।

सोना चांदी के अतिरिक्त दूसरे पदार्थो को तोलने के लिये जो तुलायें बनवाई जायें, उनका आकार प्रकार इस प्रकार होना चाहिये– 35 पल लोहे से बनी हुई, 3 हाथ लम्बी समवृत्ता (गोलाकार) नामक तुला अन्य पदार्थो को तोलने के लिये बनवानी चाहिये। उसके बीच में 5 पल का कांटा लगवाकर ठीक मध्य में एक चिन्ह भी करवा देना चाहिये। उसके बाद कांटे की गोलाकार परिधि में उस चिन्ह से क्रमशः 1 कर्ष, 2 कर्ष, 3 कर्ष, 4 कर्ष, 1 पल, 2 पल इस प्रकार 10 पल तक, 10 पल के बाद 12 पल, 15 पल और 20 पल के चिन्ह लगवाये जायें। फिर 20 पल के आगे 10–10 पल का अन्तर देकर 100 पल तक के चिन्ह लगे होने चाहिये। प्रत्येक 5 पल के बाद, मोटी जानकारी के लिये लम्बी रेखा बनवा देनी चाहिये।

द्विगुणलोहां तुलामतः षण्णवत्यंगुलायामां परिमाणीं कारयेत्।

तस्याः शतपदादूर्ध्वं विंशतिः, पंचाशत्, शतमिति पदानि कारयेत्।

उक्त समवृत्ता तुला से दुगने लोहे (2x35=70 पल परिमाण) से बनी 96 अंगुल लम्बी तुला का नाम परिमाणी है। इस पर भी समवृत्ता नामक तुला के अनुसार 100 पल तक चिन्ह लगाने के बाद 120, 150 और 200 पल तक के चिन्ह और लगने चाहिये।

विंशतितौलिको भारः

सौ पल परिमाण की एक तुला और बीस तुला परिमाण का एक भार होता है।

100 पल = 1 तुला
20 तुला = 1 भार

दशधरणिकंम पलम्। तत्पलशतमायमानी।

दस धरणि का एक पल और सौ पल परिमाण की आयमानी नामक तुला होती हैं, आयमानी अर्थात आमदनी की वस्तुओं को तोलने वाली तुला,

10 धरणि = 1 पल
100 पल = 1 आयमानी

पंचपलावरा व्यावहारिकी भाजन्यन्तः पुरभाजनी च।

आयमानी से 5 पल कम (100–5=95 पल) परिमाण की तुला का नाम व्यावहारिकी (क्रय विक्रय में व्यवहार योग्य), उससे 5 पल कम (95–5 = 90पल) की तुला का नाम भाजनी (भृत्यों को द्रव्य देने योग्य), और उससे भी 5 पल कम (90–5=85 पल) परिमाण की तुला का नाम अन्तःपुरभाजनी (रानी एवं राजकुमारों को द्रव्य देने योग्य) हैं, अर्थात

95 पल = 1 व्यावहारिकी
90 पल = 1 भाजनी
85 पल = 1 अन्तःपुरभाजनी

तासामर्धधरणावरं पलम्। द्विपलावरमुक्तरलोहम। षडंगुलावराश्चायामाः।

व्याहारिकी, भाजनी और अन्तःपुरभाजनी, इन तीनों तुलाओं में उत्तरोत्तर आधा आधा धरण कम हो जाता है। अर्थात आयमानी तुला में दस धरण का एक पल (10 धरण = 1 पल) तो व्यावहारिकी का 9 ½ धरण का एक पल (9 ½ धरण = 1पल) भाजनी का 9 धरण का एक पल (9 धरण = 1 पल) होना चाहिये। इसी प्रकार इन तुलाओं के बनाने में लोहा भी उत्तरोत्तर दो–दो पल कम लगना चाहिये, अर्थात यदि आयमानी तुला 35 पल लोहे की बनाई जाये, तो व्यावहारिकी (35–2 = 33 पल), भाजनी (33–2 = 31पल) और अन्तःपुरभाजनी (31–2 = 29पल) की बनाई जाये। इनकी लम्बाई भी पूर्वापेक्षया उत्तरोत्तर छः–छः अंगुल कम होना चाहिये। यदि आयमानी तुला 72 अंगुल लम्बी बनाई जाये तो व्यावहारिकी (72–6 = 66 अंगुल), भाजनी (66–6 = 60अंगुल) और अन्तःपुरभाजनी (60–6 = 54अंगुल) की होना चाहिये। इसके आगे द्रोण, आठक आदि मापने के साधनों के बारे में कहा गया है।

अथ धान्यमाषद्विपलशतं द्रोणमायमानम्। सप्ताशीतिपलशतमर्धपलं च व्यावहारिकम्।
पंचसप्ततिपलशतं भाजनीयम्। द्विषष्टिपलशतमर्धपलं चान्तः पुरभाजनीयम्।

दो सौ पल धान्यमाष – परिमाण का एक आयमान द्रोण (राजकीय आय को मापने योग्य) होता है। एक सौ साढ़े सत्तासी पल का एक व्यावहारिक (सर्वसामान्य के उपयोगी) द्रोण होता है। एक सौ पचहत्तर पल का एक भाजनी द्रोण (भ्रत्योपयोगी) होता है और एक सौ साढ़े बासठ पल का अन्तःपुरभाजनी द्रोण (अन्तःपुर के उपयोगी) कहा जाता है, अर्थात

200 पल धान्यमाषक = आयमानद्रोण

200 – 12 1/2	=	187 1/2 पल	= 1 व्यावहारिक द्रोण
187 1/2 – 12 1/2	=	175 पल	= 1 भाजनी द्रोण
175 – 12 1/2	=	162 1/2 पल	= 1 अन्तःपुरभाजनी द्रोण

तेषामाढकप्रस्थकुडवाश्चतुर्भागावराः।

द्रोण का चौथाई आढक, आढक का चौथाई प्रस्थ और प्रस्थ का चौथाई कुडव होता है।

1/4 द्रोण = 1 आढक, 1/4आढक = प्रस्थ, 1/4प्रस्थ = 1 कुडव

षोडशद्रोणा खारी, विंशतिद्रोणिकः कुम्भः, कुम्भैर्दशभिर्वहः।

16 द्रोण = 1 खारी
20द्रोण या 1 1/4 खारी = 1 कुम्भ
10 कुम्भ = 1 वह

(ल) प्राचीन मुद्रा : प्राचीन मुद्रा के संबंध में कहा गया है–

सपादपणो द्रोणमूल्यम्। आढकस्य पादोनः। षण्माषकाः प्रस्थस्य। माषकः कुडवस्य।

लकड़ी के बने एक द्रोण परिमाण बर्तन का मूल्य सवा पण (1 ¼पण) इसी प्रकार एक आढक परिमाण के बर्तन की कीमत पौन पण (3/4 पण) एक प्रस्थ बर्तन की 6 माषक और 1 कुडव परिमाण वाले बर्तन की कीमत 1 माषक होती है।

लीलावती {4} में प्राचीन राजमुद्राओं के संबंध में कहा गया है–

वराटकानां दशकद्वयं यत् सा काकिणी ताश्च पणश्चतस्रः।
ते षोडश द्रम्म इहावगम्यो द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः।।2।।

20 कौड़ी	=	1 काकिणी	4 काकिणी	=	1 पण
16 पण	=	1 द्रम्म	16 द्रम्म	=	1 निष्क

भारपरिमाणम् से–

तुल्या यवाभ्यां कथिताऽत्र गुंजा वल्लस्रिगुंजो धरणं च तेऽष्टौ।
गद्याणकस्तद् द्वयमिन्द्रतुल्यैर्बल्लैस्तथैको घटकः प्रदिष्टः ।।3।।

दो यव के तुल्य 1 गुंजा (2 यव = 1 गुंजा) तीन गुंजा का एक वल्व (3गुंजा = 1 वल्व) और 3 वल्व = 1 धरण, 2 धरण = 1 गद्याणक तथा 14 वल्व = 1 घटक

दशार्धगुंजं प्रवदन्ति माषं माषाह्वयैः षोड्शभिश्च कर्षम्।

कर्षैश्चतुर्भिश्च पलं तुलाज्ञाः कर्ष सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञम्।।4।।

तौलना जानने वाले विशेषज्ञ पांच गुंजा का एक माष (5 गुंजा = 1माष), सोलह माष का एक कर्ष (16माष = 1कर्ष) और चार कर्ष का एक पल (4 कर्ष = 1पल) होता है। सोने का कर्ष सुवर्ण संज्ञक है अर्थात् 1 कर्ष = 1 सुवर्ण।

यवोदरैरंगुलमष्टसंख्यैर्हस्तोऽगुलैः पडगुणितैश्चतुर्भिः।

हस्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दण्डः क्रोशः सहस्रद्वितयेन तेषाम् ।।5।।

आठ यवोदर का एक अंगुल (8 यवोदर = 1 अंगुल), चौबीस अंगुल का एक हाथ (24 अंगुल = 1 हाथ), चार हाथ का एक दण्ड (4 हाथ = 1 दण्ड), और दो हजार दण्ड का एक कोश (2,000 दण्ड = 1 कोश) होता है।

स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा कराणां दशकेन वंशः।

निर्वतनं विंशतिवंशसंख्यैः क्षेत्रं चतुर्भिश्च भुजैर्निबद्धम्।।6।।

4 कोश = 1 योजन
10 हाथ = 1 वंश
20 वंश x 20 वंश = 400 वर्ग वंश = 1 निवर्तन (बीघा)

हस्तोन्मितैर्विस्तृतिदैर्ध्यपिण्डैर्यद् द्वादशास्रं घनहस्तसंज्ञम्।

धान्यादिके यद् घनहस्तमानं शास्त्रोदिता मागधखारिका सा ।।7।।

1 घनहस्त (1 हाथ लम्बा, 1 हाथ चौड़ा, 1 हाथ गहरा) 12 कोणों वाला पात्र = 1 खारी (मगध देशों में प्रचलित)

पादोनगद्याणकतुल्यटंकैर्द्विसप्ततुल्यैः कथितोडत्र सेरः।

मणाभिधानं खयुगैश्च सेरैर्धान्यादितौल्येषु तुरुष्कसंज्ञा ।।9।।

बहत्तर पौन 3/4 गद्याणक तुल्य टंक का एक सेर अर्थात

36 रत्ती (गुंजा) = 1 टंक
72 टंक = 1 सेर
40 सेर = 1 मन

द्वयंकेन्दु-संख्यैर्धटकैश्च सेरस्तैः पंचभिः स्याद्धटिका च ताभिः।

मणोऽष्टभि 'स्त्वालमगीरशाह' कृताऽत्र संज्ञा निजराज्यपूर्षु ।।10।।

192 घटक = 1 सेर
5 सेर = 1 घटिका
8 घटिका = 1 मन

कुछ विशेष परिभाषायें निम्नवत् हैं:-

1. भारतीय मुद्रा की परिभाषा

20 रचौड़ी = 1 फौड़ी, 20 फौड़ी = 1 बौड़ी
20 बौड़ी = 1 कौड़ी 20 कौड़ी = 1 दमड़ी
2 दमड़ी = 1 छदाम 2 छदाम = 1 अधेला

2 अधेला = 3 पाई　　3 पाई = 1 पैसा
4 पैसा = 1 आना　　16 आने = 1 रूपया

2. तौल की परिभाषा

8 खसखस = 1 चावल　　8 चावल = 1 रत्ती
8 रत्ती = 1 माशा　　12 माशा = 1 तोला
5 तोला = 1 छटाक　　4 छटाक = 1 पाव
4 पाव = 1 सेर　　5 सेर = 1 पसेरी
8 पसेरी = 1 मन

3. देशी तौल की परिभाषा–

20 फनई = 1 रनई　　20 रनई = 1 कनई
20 कनई = 1 छटाक　　16 छटाक = 1 सेर
40 सेर = 1 मन

4. बम्बई की स्थानीय तौल –

4 धान = 1 रिक्तक　　8 रिक्तक = 1 माश
4 माशे = 1 टंक　　72 टंक = 1 सेर
40 सेर = 1 मन　　20 मन = 1 कांदी
1 मन = 28 पौण्ड

5. मद्रास की तौल –

3 तोले = 1 पलम्　　8 पलम् = 1 सेर
5 सेर = 40 पलम् = 1 विसम्,　　8 विस = 1 मन
20 मन = 1 कांदी मद्रासी　　1 मन = 25 पौण्ड

6. वस्तुओं की गणना का परिमाण –

12 वस्तु = 1 दर्जन　　12 दर्जन = 1 ग्रोस
5 वस्तु = 1 गाही　　20 वस्तु = 1 कोड़ी
24 ताव कागज = 1 जिस्ता　　20 जिस्ता = 1 रीम
10 रीम = 1 गट्ठा　　200 पान = 1 ढोली

7. लम्बाई माप की परिभाषा –

3 यव = 1 अंगुल　　3 अंगुल = 1 गिरह　　4 गिरह = 1 बित्ता
8 गिरह = 1 हाथ　　16 गिरह = 1 गज
5 हाथ 1 बित्ता = 1 लग्गा (पूर्णियॉ) 4 हाथ = 1 लग्गा (बंगाल)
6 ½ या 7 ½ हाथ = 1 लग्गा (दरभंगा)
9 हाथ (भुजा सहित) = 1 लग्गा (नेपाल) 20 लग्गा = 1 जरीब

लम्बाई, भार स्थूल पदार्थों का तथा स्वर्ण, रजत आदि कीमती द्रव्यों का क्षेत्रफल, घनफल आदि का मापन अलग अलग इकाईयों से प्रारंभ होता है। अधिकांश में सूक्ष्म से स्थूल की ओर बढ़ते बढ़ते एक बिन्दु ऐसा आ ही जाता है जो अंक 9 का अपवर्त्य (Multiple) होता {5} है। एक बार 5 की अपवर्त्य संख्या आ गई तो आगे उसे किसी भी पूर्णांक संख्या से गुणा करें गुणनफल में 9 की गुणन संख्या ही आती है।

अंक सम्राट आचार्य श्री तुलसी {6} से

1. विस्तार माप

12 इंच = 1 फुट　　36 इंच = 3 फीट = 1 गज

198 इंच = 5 ½ गज = 1 दण्ड 79 20इंच = 40 दण्ड = 1 फर्लांग
63360 इंच = 8 फर्लांग = 1 मील

2. लम्बाई का भारतीय परिमाण

72 विन्दु या 3 लम्बे जव = 1 इंच 9 इंच = 1 वितस्ति
18 इंच = 1 हाथ 36 इंच = 1 गज

3. भारतीय दर्जियों की रीति

9/4 इंच = 1 गिरह 9 इंच या 4 गिरह = 1 वितस्ति
36 इंच या 16 गिरह = 1 गज

4. पिण्ड माप या घन परिभाषा

1728 घन इंच = 1 घन फुट 27 घन फुट = 1 घन गज

5. वर्ग परिभाषा (क्षेत्रफल–माप)

144 वर्ग इंच = 1 वर्गफुट 1296 वर्ग इंच = 9 वर्गफुट = 1 वर्गगज
39204 वर्ग इंच = 30.25 वर्ग गज = 1 वर्ग दण्ड
6272640 वर्ग इंच = 160 वर्ग दण्ड = 1 एकड़ = 43560वर्ग फुट
17898400 वर्गफुट = 640 एकड़ = 1 वर्ग मील 36 वर्गमील = 1 नगर क्षेत्र

6. ग्रेट ब्रिटेन और संयुक्त राष्ट्र में

7.92 इंच = 1 लिंक = 20.1168 सेमी0 792 इंच = 100 लिंक = 1 चैन = 20.1168 मी0
7920 इंच = 10 चैन = 1 फर्लांग = 201.168 मी0
63360 इंच = 80 चैन = 1 मील = 1609.344 मी0

7. अंग्रेजी धारित तौल (तरल पदार्थ)

4 गिल = 1 पिन्ट 8 गिल = 2 पिन्ट = 1 क्वार्ट
32 गिल = 4 क्वार्ट = 1 गैलन 1008 गिल = 31.5 गेलन = 1 बेरल
2016 गिल = 2 बेरल = 1 बड़ा पीपा

8. नाविक माप

6080 फीट = 1 नाविक मील 364800 फीट = 60 नाविक मील = 1 अंश
1313280 फीट = 360अंश = 1 वृत्त अथवा
6 फीट = 1 फैदम 600 फीट = 100 फैदम = 1 जंजीर
6000 फीट = 10 केबल की लम्बाई = 1 नाविक मील
360000 फीट = 60 नाविक मील = 1 अंश 129600000 फीट = 360 अंश = 1 वृत्त

9. भार मापन (अंग्रेजी) अंग्रेजी जौहरियों की तौल

20 माइट = 1 ग्रेन 61720 माइट = 3036 ग्रेन = 1 केरट
480 माइट = 24 ग्रेन = 1 पेनी जितना बजन 9600 माइट = 20पेनी (भार) = 1औंस
115200 माइट = 21 औंस = 1 पौंड

10. सूखी औषधियों का तौल

20 ग्रेन = 1 स्क्रूपल 60 ग्रेन = 3 स्क्रूपल = 1 ड्राम
480 ग्रेन = 8 ड्राम = 1 औंस 5760 ग्रेन = 12 औंस = 1 पौंड

11. तरल औषधियों का तौल

60 बिन्दुक = 1 ड्राम 480 बिन्दुक = 8 ड्राम = 1 औंस
5760 बिन्दुक = 12 औंस = 1 पिंट 46080 बिन्दुक = 8 पिंट = 1 गेलन

12. कुछ अंग्रेजी भार मापक इकाईयों का दाशमिक इकाईयों में रूपान्तरण करने पर

1 ग्रेन = 0.0648 ग्राम 437 ½ ग्रेन = 1 औंस = 2 8. 3 5 ग्राम
7000 ग्रेन = 16 औंस = 1 पौण्ड = 4 5 3. 6 0 ग्राम अथवा
1 ग्रेन = 0. 0 6 4 8 ग्राम 437 ½ ग्रेन = 1 औंस = 28.35 ग्राम

16 औंस = 1 पौण्ड = 4 5 3. 6 0 ग्राम 122 पौण्ड = 1 गोणी (भर) = 50803.20 ग्राम
20 गोणी = 1 टन = 1016064 किलोग्राम

13. बल की इकाईयाँ

981 डाइन = 1 ग्राम भार 9.81 न्यूटन = 1 किलोग्राम भार

14. वृत्तीय या कोणीय माप

60 सेकेण्ड या विकला ('')	=	1 मिनट या कला (1)
3600 सेकेण्ड या विकला ('')	=	60 मिनट या कला = 1 अंश
324000 सेकेण्ड या विकला	=	90 अंश = 1 वृत्तपाद
1296000 सेकेण्ड या विकला	=	360 अंश = 1 वृत्त 180अंश = 1 रेडियन

1.घ.3 शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के साक्ष्य :
(Evidencecs of Binary Number System in Ancient Indian Literature)

शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के तथ्य मिलते हैं। रामचरित मानस {7} के सुन्दरकाण्ड से, जब हनमान जी सीता जी की खोज करने जा रहे थे तब देवताओं ने पवनपुत्र हनुमान जी को देखा। उनकी विशेष बल बुद्धि को जानने के लिए उन्होंने सुरसा नामक सर्पो की माता को भेजा, उसने आकर हनुमान जी से कहा आज देवताओं ने मुझे भोजन दिया है। यह सुनकर पवनपुत्र ने कहा श्री राम जी का कार्य करके मै लौट आऊँ और सीता जी की खबर प्रभु को सुना दूँ तब मै आकर तुम्हारे भोजन के लिए आ जाऊँगा। सुरसा के संतुष्ट नहीं होने पर हनुमान जी और सुरसा के बीच संघर्ष होने लगा।

जोजन भरि तेहिं वदनु पसारा। कपि तनु कीन्ह दुगन विस्तारा।।
सोरह जोजन मुख तेहिं ठयऊ। तुरत पवनसुत बत्तिस भयऊ।।4
जस जस सुरसा बदनु बढ़ावा । तासु दून कपि रूप देखावा।।
सत जोजन तेहिं आनन कीन्हां । अति लघु रूप पवनसुत कीन्हा।।5

सुरसा ने योजन भर (चार कोस में) मुँह फैलाया। तब हनुमान जी ने अपने शरीर को दूना बढ़ा लिया। उसने सोलह योजन का मुख किया। हनुमान जी तुरन्त ही बत्तीस योजन के हो गये। जैसे जैसे सुरसा मुख का विस्तार बढ़ाती थी, हनुमान जी उसका दूना रूप दिखलाते थे। उसने सौ योजन (चार सौ कोस) का मुख किया तब हनुमान जी ने बहुत ही छोटा सा रूप धारण कर लिया।

नारद पुराण {8–10} में छन्द शास्त्र का संक्षिप्त परिचय दिया गया है–

छन्द दो प्रकार के होते हैं – 1. वैदिक 2. लौकिक

1. वैदिक : वेदमंत्रों में जो गायत्री, अनुष्टुप, वृहती और त्रिष्टुप आदि छन्द प्रस्तुत हुये हैं उनको वैदिक छन्द कहते हैं।

2. लौकिक : इतिहास, पुराण, काव्य आदि के पद्यों में प्रयुक्त जो छन्द हैं वे लौकिक कहे गये हैं। मात्रा और वर्ण के भेद से लौकिक या वैदिक छन्द भी दो–दो प्रकार के होते हैं– 1. मात्रिक, 2.वर्णिक

1. मात्रिक छन्द : परिगणित मात्राओं से पूर्ण होने वाले छन्दों को मात्रिक कहते हैं।

2. वर्णिक छन्द : परिगणित अक्षरों से सिद्ध होने वाले छन्दों को वर्णिक कहते हैं।

छन्द शास्त्र के विद्वानों ने मगण, यगण, रगण, सगण, तगण, जगण, भगण और नगण तथा गुरू एवं लघु – इन्हीं को छन्दों का सिद्धि में कारण बताया है।

गण वितरण (गुरू ऽ, लघु ।), तीन अक्षरों के समुदाय का नाम गण है

गणनाम	मगण	यगण	रगण	सगण	तगण	जगण	भगण	नगण
स्वरूप	SSS	ISS	S IS	I IS	SS I	I S I	S I I	I I I
देवता	पृथ्वी	जल	अग्नि	वायु	आकाश	सूर्य	चन्द्रमा	स्वर्ग
फल	लक्ष्मीवृद्धि	अभ्युदय	विनाश	भ्रमण	धननाश	रोग	सुयश	आयु
संज्ञा	मित्र	भृत्य	शत्रु	शत्रु	उदासीन	उदासीन	भृत्य	मित्र

यदि काव्य में ऐसे छन्द को चुना गया, जो जगण आदि अनिष्टकारी गणों से संयुक्त हो तो उसकी शान्ति के लिये प्रारंभ में भगवद्वाचक एवं देवतावाचक शब्दों का प्रयोग करना चाहिये, जैसा कि भामह का वचन है–

देवतावाचकाः शब्द ये च भद्रादिवाचकाः। ते सर्वे नैव निन्द्याः स्युर्लिपितो गणतोऽपि वा।। (पिंगलसूत्रकी हलायुध वृत्तिस उद्धृत) जो देवतावाचक और मंगलादिवाचक शब्द हैं, वे सब लिपिदोष या गणदोष से भी निन्दित नहीं होते।' (उनके द्वारा उक्त दोषों का निवारण हो जाता है।) आर्या छन्द में प्रयुक्त

सर्वगुरू	अन्त्यगुरू	मध्यगुरू	आदिगुरू	चतुर्लघु
SS	I IS	IS I	S I I	I I I I
1	2	3	4	5
कर्ण	करतल	पयोधर	वसुचरण	विष्ठ

एक से छब्बीस अक्षर तक के पाद वाले छन्दों की संख्या क्रमशः उक्ता, अत्युक्ता, मध्या, प्रतिष्ठा, सुप्रतिष्ठा, गायत्री, उष्णिक्, अनुष्टुप्, बृहती, पड्क्ति, त्रिष्टुप्, जगती, अतिजगती, शक्वरी, अतिशक्वरी, अष्टि, अत्येष्टि, धृति, विधृति (अति धृति), कृति, प्रकृति, आकृति, विकृति, संकृति, अतिकृति (अभिकृति) तथा उत्कृति होती है। छन्द शास्त्र में छः प्रत्यय होते हैं

(च) प्रस्तार : प्रस्तार का अर्थ है फैलाव, अमुक संख्यायुक्त अक्षरों से बने पाद वाले छन्द के कितने और कौन कौन से भेद हो सकते हैं। इस प्रश्न के समाधान के लिये जो क्रिया की जाती है, उसका नाम प्रस्तार है। सम्पूर्ण गुरू अक्षर वाले पाद में प्रथम गुरू के नीचे

लघु लिखना चाहिये, फिर दाहिनी ओर की पंक्ति को ऊपर की पंक्ति के समान भर दें। तात्पर्य यह कि शेष स्थानों में ऊपर के अनुसार गुरू लघु आदि भरें। इस क्रिया को बराबर करें इसे करते हुये अनस्थान और बायीं ओर के शेष स्थान में गुरू ही लिखें। यह क्रिया तब तक करते हैं, जब तक कि सभी लघु अक्षरों की प्राप्ति न हो जाये। उसे प्रस्तार कहा गया है। उदाहरण के लिये चार अक्षर के पाद वाले छन्द का मूलोक्त रीति से प्रस्तार किया गया है।

		अथवा			अथवा
1.	SSSS	SSSS	9.	SS I I	SSS I
2.	ISSS	ISSS	10.	IS IS	ISS I
3.	S ISS	S ISS	11.	ISS I	S IS I
4.	SS IS	I ISS	12.	I I IS	I IS I
5.	SSS I	SS IS	13.	I ISI	SS I I
6.	I ISS	IS IS	14.	IS I I	IS I I
7.	S I IS	S I IS	15.	S I I I	S I I I
8.	S IS I	I I IS	16.	I I I I	I I I I

छन्द संज्ञा

एक पाद में अक्षर संख्या	संज्ञा	भेद
1	उक्ता	$2^{1} = 2$
2	अत्युक्ता	$2^{2} = 4$
3	मध्या	$2^{3} = 8$
4	प्रतिष्ठा	$2^{4} = 16$
5	सुप्रतिष्ठा	$2^{5} = 32$
6	गायत्री	$2^{6} = 64$
7	उष्णिक्	$2^{7} = 128$
8	अनुष्टुप्	$2^{8} = 256$
9	बृहती	$2^{9} = 512$
10	पङ्क्ति्	$2^{10} = 1024$
11	त्रिष्टुप्	$2^{11} = 2048$
12	जगती	$2^{12} = 4096$
13	अतिजगती	$2^{13} = 8192$
14	शक्वरी	$2^{14} = 16384$
15	अतिशक्वरी	$2^{15} = 32798$
16	अष्टि	$2^{16} = 65536$
17	अत्यष्टि	$2^{17} = 131072$
18	धृति	$2^{18} = 262144$
19	विधृति या अतिधृति	$2^{19} = 524288$
20	कृति	$2^{20} = 1048576$
21	प्रकृति	$2^{21} = 2097152$
22	आकृति	$2^{22} = 4194304$
23	विकृति	$2^{23} = 8388608$
24	संकृति	$2^{24} = 1677216$
25	अतिकृति या अभिकृति	$2^{25} = 33553432$
26	उत्कृति	$2^{26} = 67106864$

(छ) नष्ट : प्रस्तार नष्ट हो जाने पर यदि उसके किसी भेद का स्वरूप जानना हो, तो उसे जानने की विधि को 'नष्ट प्रत्यय' कहते हैं। यदि नष्ट अंक सम है तो उसके लिये एक लघु लिखें और उसका आधा भी यदि सम हो तो उसके लिये पुनः एक लघु लिखें। यदि नष्ट अंक विषम हो तो उसके लिये एक गुरू लिखें और उसमें एक जोड़कर आधा करें यदि वह आधा भी विषम हो तो उसके लिये भी गुरू लिखें। यह क्रिया तब तक करते हैं जब तक अभीष्ट अक्षरों का पाद प्राप्त न हो जाय।

जैसे किसी ने पूछा कि चार अक्षर के पाद वाले छन्द का छठा भेद क्या है? तो इसमें छठा अंक सम है तो उसके लिये प्रथम एक लघु (।) होगा, फिर 6 का आधा करने पर तीन विषम अंक आता है अतः उसके लिये एक गुरू (ऽ) लिखा। अब 3 में 1 जोड़कर आधा किया तो 2 सम अंक प्राप्त हुआ अतः उसके लिये फिर एक लघु (।) लिखा उस 2 का आधा किया तो विषम अंक प्राप्त हुआ अतः इसके लिये एक गुरू (ऽ) लिखा। सब मिलकर (।ऽ।ऽ) ऐसा हुआ। अतः चार अक्षर वाले छन्द के छठे पाद में प्रथम अक्षर लघु, दूसरा गुरू, तीसरा लघु और चौथा गुरू होगा।

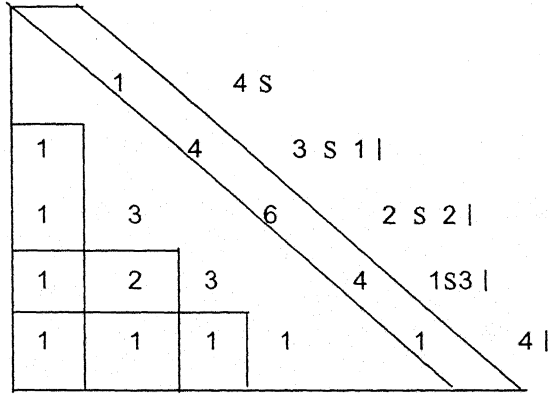
(ज) उद्दिष्ट : प्रस्तार के किसी भेद का स्वरूप तो ज्ञात हो, किन्तु संख्या ज्ञात न हो, तो उसके जानने की विधि को उद्दिष्ट कहते हैं। उद्दिष्ट में गुरू लघु बोधक जो चिन्ह हों, पहले अक्षर में एक लिखें और क्रमशः दूसरे अक्षरों पर दूने अंक लिखते जायें फिर लघु के ऊपर जो अंक हों, उन्हें जोड़कर उसमें एक मिला दें वही उद्दिष्ट स्वरूप की संख्या बतलायेगा। ऐसा पुराणवेत्ता विद्वानों का कथन है।

जैसे कोई पूछे कि चार अक्षर के पाद वाले छन्द में जहाँ प्रथम तीन गुरू और अन्त में एक लघु हो, तो उसकी संख्या क्या है अर्थात उस छन्द का कौन सा भेद है?

1 2 4 8
ऽ ऽ ऽ ।

तत्पश्चात लघु के अंक 8 में 1 जोड़ दिया तो 9 आया। यही उद्दिष्ट की संख्या है अर्थात उस छन्द का नवां भेद है।

(झ) एकद्वयादिलगक्रिया : अमुक छन्द के प्रस्तार में एक गुरू वाले या लघु वाले, दो लघु वाले या दो गुरू वाले, तीन लघु वाले या तीन गुरू वाले भेद कितने हो सकते हैं, यह पृथक–पृथक जानने की जो प्रक्रिया है, उसे एकद्वयादिलगक्रिया कहते हैं। छन्द के अक्षरों की जो संख्या हो उसमें एक अधिक जोड़कर उतने ही एकांक ऊपर नीचे के क्रम से लिखें। उन एकांकों को ऊपर की अन्य पंक्ति मे जोड़ दें किन्तु अन्त्य के समीपवर्ती अंक

को न जोड़ें और ऊपर के एक एक अंक को त्याग दें। ऊपर के सर्वगुरू वाले पहले भेद से नीचे तक गिनें। इस रीति से प्रथम भेद सर्वगुरू, दूसरा भेद एक गुरू और तीसरा भेद द्विगुरू होता है। उसी तरह नीचे से ऊपर की ओर ध्यान देने से सबसे नीचे का सर्वलघु, उसके ऊपर की एक लघु, तीसरा भेद द्विलघु इत्यादि होता है। इस प्रकार एकद्वयादि लगक्रिया जानना चाहिये।

निम्न उदाहरण से यह बात स्पष्ट होती है।

अर्थात चार अक्षर वाले छन्द के प्रस्तार में 4 लघु वाला 1 भेद, एक गुरू और तीन लघु वाला 4 भेद, 2 गुरू और दो लघु वाला 6 भेद, तीन गुरू और 1 लघु वाला 4 भेद और 4 गुरू वाला 1 भेद होगा।

(ञ) संख्यान : लग किया के अंकों को जोड़ देने से उस छन्द के प्रस्तार की पूरी संख्या ज्ञात हो जाती है। यही संख्यान प्रत्यय कहलाता है, अथवा उद्दिष्ट पर दिये हुये अंकों को जोड़कर उसमें एक का योग कर दिया जाय तो वह भी प्रस्तार की पूरी संख्या को प्रकट कर देता है।

यथा – चार अक्षर के प्रस्तार में लगक्रिया के अंकों 1+4+6+4+1 = 16 होता है अतः चार अक्षर के पाद वाले छन्द के सोलह भेद होंगे अथवा उद्दिष्ट के अंक 1+2+4+8 = 15, इसमें 1 का योग करने से प्रस्तार संख्या 16 प्रकट हो जाती है।

(ट) अध्वयोग : छन्द के प्रस्तार को अंकित करने के लिये जो स्थान का नियमन किया जाता है उसे अध्वयोग प्रत्यय कहते हैं। प्रस्तार की जो संख्या 8 है, उसे दूना करके एक घटा देने से जो अंक आता है, उतने ही अंगुल का उसके प्रस्तार के लिये अध्य या स्थान कहा जाता है।

1.घ.4 निष्कर्ष (Conclusion) :

प्राचीन भारत के पास समय के इतने सूक्ष्म विभागों के नापने के उपकरण होने की संभावना नहीं है। ये विभाग पूर्णतः सैद्धान्तिक हैं और इनका विकास दार्शिनिक कारणों से हुआ। इससे वाणिज्य की प्रगति तथा वाणिज्य संबंधी गणित की उत्पत्ति का पता चलता है। प्राचीन भारतीय शास्त्रों में द्विअंकीय प्रणाली के तथ्य मिलते हैं, स्पष्ट है हमारे प्राचीन विद्वान सिद्धहस्त गणितज्ञ थे।

1.घ.5 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} B.B Dutta & A.N.Singh, History of Hindu Mathmatics, Bhartiya Prakashan, New Delhi, (2001).

{2} Lalit Kishor Pandey, Modern Scientific Vision of the Old Indian Mind, स्मारिका एकात्म मानव विज्ञान, जवलपुर, दिसम्बर 2005, पृ0 73–78।

{3} कौटिल्य का अर्थशास्त्र, चौखम्भा विद्या भवन वाराणसी (1962)

{4} लीलावती, कृष्णदास अकादमी, वाराणसी (1993)

{5} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{6} साध्वी मोहना एवं साध्वी प्रेमलता, अंक सम्राट आचार्य श्री तुलसी, तेरा पंथ युवक परिषद, जयपुर (1998)

{7} श्रीरामचरितमानस, सुन्दरकाण्ड, गीताप्रेस गोरखपुर (2004)

{8} नारद पुराण, गीता प्रेस गोरखपुर (2002)

{9} M. M. Joshi, Bharatiya Heritage in Engineering and Technology (Inaugural Address) Indian Institute of Science, Bangalore, 2006.

{10} Academy of Sankrit Research, Mathematics in Ancient India, Science India, Cochin, Vol. 10, No. 8 & 9, Sept. 2007, pp. 54-58.

अध्याय दो

पारिभाषिक शब्दावली
(Terminology)

प्रकाशन (Publication)

- षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।
- संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
- Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No. 3, March 2005, pp. 17-19.
- Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.
- संख्याओं की घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 10-21.
- Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 77-79.
- Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampada, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेनपूर्वेण, एकन्यूनेनपूर्वेण, परावर्त्य योजयेत्, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, विलोकनम्, यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् एवं आनुरूप्येण आदि।

2.1 अंक, आधार, आधार संख्या एवं उपाधार संख्या

(Digit, Base, Base Number and Subbase Number)

2.2 धनात्मक, ऋणात्मक, रेखा एवं परममित्र अंक

(Positive, Negative, Bar and Best Friend Digits)

2.3 साधारण एवं यौगिक संख्या **(Simple and Compound Number)**

(क) साधारण संख्या का यौगिक संख्या में रूपान्तरण

(Transformation of Simple Number into Compound Number)

(ख) यौगिक संख्या का साधारण संख्या में रूपान्तरण

(Transformation of Compound Number into Simple Number)

2.4 बीजांक, वैकल्पिक बीजांक, विचलन एवं द्वन्द्वयोग

(Beejank, Alternate Beejank, Deviation and Duplex)

2.5 संख्याओं का रूपान्तरण **(Transformation of Numbers)**

(क) दाशमिक प्रणाली से रूपान्तरण (Transformation from Decimal System)

(ख) दाशमिक प्रणाली में रूपान्तरण (Transformation in Decimal System)

(ग) द्विअंकीय प्रणाली से रूपान्तरण (Transformation from Binary System)

(घ) चतुष् अंकीय प्रणाली से षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण (Tranformation from Four Digit into Hexadecimal System)

(ङ) षोडश अंकीय से द्विअंकीय एवं चतुष्अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण

(Transformation from Hexadecimal into Binary and Four Digit System)

(च) षोडश एवं चतुष्अंकीय प्रणाली से अष्ट अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण

(Transformation from Hexadecimal and Four Digit into Octal System)

(छ) अष्टअंकीय प्रणाली से चतुष् एवं षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण

(Transformation from Octal into Four Digit and Hexadecimal System)

2.6 संदर्भ ग्रन्थ **(References)**

2.1 अंक, आधार, आधार संख्या एवं उपाधार संख्या :
(Digits, Base, Base Number and Subbase Number)

वैदिक गणित के "एकाधिकेन पूर्वेण" (पूर्व से एक अधिक द्वारा) सूत्र {1–2} का उपयोग करते हुये प्रत्येक संख्या पद्धति के अंकों को आरोही क्रमों में ज्ञात किया जाता है। प्रत्येक अंक प्रणाली में 0 (शून्य) से लेकर (X-1) तक अंक लेते हैं। अर्थात

$$S_x = \{0,1,2,3,4..........(X-1)\},\ X \geq 2$$

जहॉ X आधार एवं (X-1) सर्वोच्च अंक है। X^n एवं a X^n को क्रमशः आधार संख्या एवं उपाधार संख्या कहा जाता है, जहॉ n घातांक एवं $a \in S_x$, $a \neq 1$ है। एक मात्र द्विअंकीय प्रणाली ही उपाधार संख्या विहीन संख्या पद्धति है।

2.2 धनात्मक, ऋणात्मक, रेखा एवं परममित्र अंक :
(Positive, Negative, Bar and Best Friend Digits)

धनात्मक, ऋणात्मक, रेखा एवं परममित्र अंक की परिभाषायें निम्नवत् हैं:–

(क) 0, 1, 2 .... (X-1) को धनात्मक अंक कहा जाता है।

(ख) - 0, -1,-2 ....- (X-1) को ऋणात्मक अंक कहा जाता है।

(ग) ऋणात्मक चिन्ह को अंक के ऊपर अर्थात $\bar{a}$, a ∈ S_X प्रयुक्त करने पर रेखांक प्राप्त होता है।

(घ) जिन संख्याओं का योग आधार के तुल्य होता है वह परममित्र अंक कहलाते हैं।

2.3 साधारण एवं यौगिक संख्या (Simple and Compound Number) :

धनात्मक अंकों से मिलकर बनी संख्या साधारण संख्या कहलाती है। धनात्मक एवं रेखा अंकों {3–10} से मिलकर बनी संख्या यौगिक संख्या कहलाती है।

2.3(क) साधारण संख्या का यौगिक संख्या में रूपान्तरण :
(Transformation of Simple Number into Compound Number)

जब साधारण संख्या में ऐसे अंक होते हैं जो X/2 से बड़े होते हैं तो "निखिलं नवतः चरमं दशतः"(सबको नौ सर्वोच्च अंक से, अंतिम को दस आधार से घटाना) एवं "एकाधिकेन पूर्वेण— सूत्रों का उपयोग करते हुये साधारण संख्या को यौगिक संख्या में रूपांतरित किया जाता है। सूत्र "निखिलं नवतः चरमं दशतः" का व्यापक अर्थ है "सबको सर्वोच्च अंक से अंतिम को आधार से घटाना"। रूपान्तरित करने के क्रियापद निम्नवत् है "सर्वप्रथम बड़े अंकों के युग्मों का निर्धारण किया जाता है तत्पश्चात प्रत्येक युग्म के सभी अंकों को सर्वोच्च अंक से तथा इकाई अंतिम को

आधार से घटाया जाता है एवं इनके स्थान पर रेखांक लिखे जाते हैं तदुपरान्त प्रत्येक युग्म के पूर्ववर्ती अंक का एक अधिक लिखा जाता है, यथा–

(1) $(111100111)_2 = (1000\bar{1}0100\bar{1})_2$ (2) $(13230133)_4 = (20\bar{1}\,\bar{1}020\bar{1})_4$
(3) $(45365)_8 = (1\bar{3}\ \bar{3}4\bar{1}\bar{3})_8$ (4) $(3AA96AC)_{16} = (4\bar{5}\bar{5}\ \ \bar{7}7\bar{5}\bar{4})_{16}$

2.3(ख) यौगिक संख्या का साधारण संख्या में रूपान्तरण :
(Transformation of Compound Number into Simple Number)

यौगिक संख्या का साधारण संख्या में रूपान्तरण ''निखिलं नवतः चरमं दशतः'' एवं ''एकन्यून पूर्वेण'' पूर्व से एक कम द्वारा सूत्रों का उपयोग करते हुये निम्नवत् किया जाता है।

''सर्वप्रथम रेखांक युग्मों का निर्धारण किया जाता है तत्पश्चात प्रत्येक युग्म के सभी अंकों को सर्वोच्च अंक से तथा इकाई अंक को आधार से घटाया जाता है तथा इनके स्थान पर धनात्मक अंक लिखे जाते हैं तदुपरांत प्रत्येक युग्म के पूर्ववर्ती अंक का एक कम लिखा जाता है। यथा –

(1) $(100\bar{1}100\bar{1})_2 = (1110111)_2$
(2) $(\bar{1}23\bar{A}\ \bar{B}052)_{16} = -(1\bar{2}\bar{3}AB0\bar{5}\bar{2})_{16}$
$= -(DDAAFAE)_{16}$
(3) $(\bar{3}210\bar{2}3012)_8 = -(257014766)_8$ (4) $(10\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{4}0\bar{4}\ \bar{1})_{16} = (FCEBFBF)_{16}$

2.4 बीजांक, वैकल्पिक बीजांक, विचलन एवं द्वन्द्वयोग :
(Beejank, Alternate Beejank, Deviation and Duplex)

बीजांक, वैकल्पिक बीजांक, विचलन एवं द्वन्द्वयोग की परिभाषायें निम्नवत् हैः–

(य) किसी संख्या के अंकों का एक अंकीय योगफल बीजांक कहलाता है। परिशिष्ट(2)। यथा–

(1) $(5362)_8 = (5+3) + (6+2) = 10+10=1+0+1+0 =(2)_8$
(2) $(58ABCDF)_{16} = (5+8+A+B+C+D+F)_{16} = (4A)_{16} = (4+A)_{16} = (E)_{16}$
(3) $(69EABCD)_{16} = (6+9+E+A+B+C+D)_{16} = (4B)_{16} = (4+B)_{16} = (F)_{16}$

बीजांक का उपयोग उत्तर की परिशुद्धता के परीक्षण में किया जाता है जो संक्रिया संख्याओं के मध्य की जाती है वही संक्रिया संख्याओं के बीजांकों के मध्य की जाती है। यदि दोनों परिणामों के बीजांक समान होते हैं, तो उत्तर परिशुद्ध होता है। बीजांक अल्पतम (शून्य) एवं सर्वोच्च अंक की त्रुटि को इंगित नहीं करता है यदि संख्या में अंकों के स्थान परस्पर बदल जाते हैं तो वह भी त्रुटि पता नहीं चलेगी।

(र) किसी संख्या के अंकों का एकान्तर क्रम में योग एवं अन्तर वैकल्पिक बीजांक कहलाता है। यथा–(1) $(34865B16)_{16} = 3+\bar{4}+8+\bar{6}+5+\bar{B}+1+\bar{6}=\bar{A}$ (2) $(72)_8=7+\bar{2}=5$

वैकल्पिक बीजांक का उपयोग भी उत्तर की परिशुद्धता के परीक्षण में किया जाता है।

(ल) संख्या एवं निकटतम आधार संख्या अथवा उपाधार संख्या का अंतर विचलन कहलाता है। यथा

(1) संख्या = $(100B)_{16}$, आधार संख्या = 1000, विचलन = 00B

(2) संख्या= $(200A)_{16}$, उपाधार संख्या = 2000,विचलन = 00A

(3) संख्या= $(FFFF)_{16} = (100\bar{1})_{16}$, आधार संख्या = 1000 ,विचलन = $00\bar{1}$

(न) प्राचलक की सहायकता से प्रत्येक स्थान (X^n) हेतु मान निकालना द्वन्द्वयोग कहलाता है। इसकी गणना X^0 से X^n की ओर की जाती है।

2.5 संख्याओं का रूपान्तरण (Transformation of Numbers) :

किसी संख्या पद्धति की किसी संख्या का अन्य संख्या पद्धति में रूपान्तरण अधोलिखित विधियों द्वारा {11–15} किया जाता है। परिशिष्ट(1–2)।

2.5(क) दाशमिक प्रणाली से रूपान्तरण (Transformation from Decimal System) :

दाशमिक प्रणाली की संख्या का अन्य संख्या पद्धतियों यथा द्विअंकीय, चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय में रूपान्तरण निम्नवत् किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) सर्वप्रथम संख्या के दशमलव के बायीं ओर (पूर्णांश) एवं दायीं ओर (अपूर्णांश) के अंक समूहों को अलग–अलग लिखा जाता है।

(2) (क) जिस संख्या पद्धति में रूपान्तरण करना होता है उसके आधार से पूर्णांश को विभाजित किया जाता है। भागफल एवं शेषफल ज्ञात किया जाता है। यह प्रक्रिया सतत दुहरायी जाती है जब तक भागफल शून्य प्राप्त न हो जाए।

(ख) अंतिम शेषफल से प्रथम शेषफल को बायें से दायें लिखा जाता है। यह रूपान्तरित संख्या का अन्य संख्या पद्धति में पूर्णांश होता है।

(3) (क) संख्या के अपूर्णांश को आधार से गुणा किया जाता है तथा गुणनफल के पूर्णांश को अलग लिखा जाता है तथा अपूर्णाश को आधार से पुनः गुणा किया जाता है। यह क्रिया सतत दुहरायी जाती है, जब तक अपूर्णांश में शून्य प्राप्त न हो जाए अथवा पूर्णांश में अंकों की पुनरावृत्ति न होने लगे। (ख) प्रथम पूर्णांश से अन्तिम पूर्णांश को बायें से दायें लिखा जाता है। यह रूपान्तरित संख्या का अपूर्णांश होता है।

(4) 2 (ख) 3 (ख) से प्राप्त राशियों को यथा स्थान लिखा जाता है।

यह अभीष्ट रूपान्तरित संख्या होती है।

उदाहरण (1) (च) $(73283336)_{10} = (Y)_8$ (छ) $(56892.2982)_{10} = (Y)_8$

हल : (च) $(73283336)_{10} = (Y)_8$

भाजक	भाज्य / भागफल	शेषफल
8	73283336	–
8	9160417	0
8	1145052	1
8	143131	4
8	17891	3
8	2236	3
8	279	4
8	34	7
8	4	2
8	0	4

$(73283336)_{10} = (427433410)_8$

(छ) $(56892.2982)_{10} = (Y)_8$

भाजक	भाज्य / भागफल	शेषफल
8	56892	–
8	7111	4
8	888	7
8	111	0
8	13	7
8	1	5
8	0	1

पूर्णांश $= (56892)_{10} = (157074)_8$

गुणक	अपूर्णांश / गुणनफल	पूर्णांश
8	0.2982	-
8	0.3856	2
8	0.0848	3
8	0.6784	0
8	0.4272	5
8	0.4176	3
8	0.3408	3
8	0.7264	2
8	0.8112	5
8	0.4896	6
8	0.9168	3
8	0.3344	7
8	0.6752	2
8	0.4016	5
8	0.2128	3
8	0.7024	1
8	0.6192	5
8	0.9536	4
8	0.6288	7
8	0.0304	5
8	0.2432	0
8	0.9256	1
8	0.5648	7
8	0.5184	4
8	0.1472	4
8	0.1796	1
8	0.4208	1

$(0.2982)_{10} = (0.23053325637253154750174411...........)_8$

अतः $(56892.2982)_{10} = (157074.2306)_8$

दाशमिक प्रणाली की संख्या के अपूर्णांश में जितने अंक हों, अन्य पद्धति के अपूर्णांश में उतने ही अंक लेकर अभीष्ट अपूर्णांश प्राप्त किया जा सकता है।

2.5(ख) दाशमिक प्रणाली में रूपान्तरण (Transformation in Decimal System) :

अन्य संख्या पद्धतियों की संख्याओं का दाशमिक प्रणाली में रूपान्तरण निम्नवत् किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) सर्वप्रथम संख्या के पूर्णांश एवं अपूर्णांश को अलग–अलग लिखा जाता है। (2) पूर्णांश के बायीं ओर के (सर्वोच्च स्थान) अंक में आधार से गुणन करके गुणनफल ज्ञात किया जाता है। गुणनफल में अगले स्थान के अंक को जोड़कर योगफल में आधार से गुणा करके गुणनफल ज्ञात किया जाता है। यही क्रिया सतत दुहराने से (दायाँ अंक जोड़ने तक) दाशमिक प्रणाली का अभीष्ट पूर्णांश प्राप्त होता है। (3) अपूर्णांश के दायीं ओर के अंक को आधार से विभाजित किया जाता है तथा अगले अंक को जोड़कर योगफल को आधार से विभाजित किया जाता है यही क्रिया सतत दुहराने से (बायाँ अंक जोड़कर योगफल को आधार से विभाजित करने तक) दाशमिक प्रणाली का अभीष्ट अपूर्णांश प्राप्त होता है। (4) पूर्णांश एवं अपूर्णांश को यथा स्थान रखने पर दाशमिक प्रणाली की अभीष्ट संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (2) (क) $(168AFD)_{16} = (Y)_{10}$ (ख) $(F6A30B.BCD)_{16} = (Y)_{10}$

(ग) $(32123)_4 = (Y)_{10}$ (घ) $(1111)_2 = (Y)_{10}$

हल (क) $(168AFD)_{16} = (Y)_{10}$

$1\times16 = 16$, $16+6=22$, $22\times16 = 352$, $352+8 = 360$, $360\times16 = 5760$

$5760+A = 5770$, $5770\times16=92320$, $92320+F= 92335$,

$92335\times16 = 1477360$, $1477360+D = 1477373$

$(168AFD)_{16} = (1477373)_{10}$

(ख) $(F6A30B.BCD)_{16} = (Y)_{10}$

पूर्णांश = F6A30B, अपूर्णांश = 0. BCD

पूर्णांशः $F\times16 = 240$, $240+6 = 246$, $246\times16 = 3936$, $3936+A = 3946$,

$3946\times16=63136$, $63136+3=63139$, $63139\times16=1010224$,

$1010224+0= 1010224$, $1010224\times16 = 16163584$, $161635884+B = 16163595$

$(F6A30B)_{16} = (16163595)_{10}$

अपूर्णांशः $D\div16 = 0.8125$, $0.8125+C= 12.8125$,

$12.8125\div16 = 0.80078125$, $0.80078125+B = 11.80078125$,

$11.80078125 \div16 = 0.7375048$, $(0.BCD)_{16} = (0.738)_{10}$

अतः $(F6A30B.BCD)_{16} = (16163595.738)_{10}$

(ग) $(32123)_4 = (Y)_{10}$

$3\times4=12$, $12+2=14$, $14\times4=56$, $56+1=57$, $57\times4=228$,

228+2=230, 230 ×4=920, 920+3=923, $(32123)_4=(923)_{10}$

(घ) $(1111)_2 = (Y)_{10}$

1×2=2, 2+1=3, 3 × 2=6, 6+1=7, 7 × 2=14, 14+1=15

$(1111)_2 = (15)_{10}$

2.5(ग) द्विअंकीय प्रणाली से रूपान्तरण :

(Transformation from Binary Number System)

द्विअंकीय प्रणाली की संख्या का चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण निम्नवत् किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) जिस अंक प्रणाली में संख्या का रूपान्तरण करना है, उसके आधार को 2^n के पदों में व्यक्त किया जाता है। (2) संख्या के पूर्णांश एवं अपूर्णांश को अलग–अलग लिखा जाता है। (3) पूर्णांश के दायें से बायें n अंकों के समूह बनाकर उन्हें अभीष्ट आधार की संख्या में रूपान्तरित कर लिया जाता है। यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट संख्या का पूर्णांश प्राप्त होता है। (4) अपूर्णांश के बायें से दायें n अंकों के समूह बनाकर उनहें अभीष्ट आधार की संख्या में रूपान्तरित कर लिया जाता है। यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट संख्या का अपूर्णांश प्राप्त होता है। (5) पूर्णांश एवं अपूर्णांश को यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (3) (अ) $(1100111011011\ .\ 01110011101)_2 = (Y_1)_4 = (Y_2)_8 = (Y_3)_{16}$

(ब) $(1000\ 111100111.111011\dot{1}\ 011\dot{1})_2 = (y_1)_4 = (Y_2)_8 = (Y_3)_{16}$

हल : $4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 16 = 2^4$

(अ) $(1100111011011\ .01110011101)_2 = (1\ 10\ 01\ 11\ 01\ 10\ 11\ .\ 01\ 11\ 00\ 11\ 10\ 10)_2$

$(Y_1)_4 = (1\ \ 2\ 1\ \ 3\ 1\ \ 2\ \ 3\ .\ \ 1\ \ 3\ 0\ \ 3\ \ \ 2\ 2)_4$

$(1100111011011\ .\ 01110011101)_2 = (1\ 100\ 111\ 011\ 011.\ 011\ 100\ 111\ \ 010)_2$

$(Y_2)_8 = (1\ \ \ 4\ \ \ 7\ \ \ 3\ \ \ 3.\ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 7\ \ \ 2)_8$

$(1100111011011\ .\ 01110011101)_2 = (1\ 1001\ 1101\ 1011\ .\ 0111\ 0011\ 1010)_2$

$(Y_3)_{16} = (1\ \ \ 9\ \ \ D\ \ \ B\ .\ \ 7\ \ \ 3\ \ \ A)_{16}$

(ब) $(1000\ 111100111.111011\dot{1}\ 0\ 11\dot{1})_2 = (1\ \ 00\ 01\ 11\ 10\ 01\ 11.\ 1110\ 11\dot{1}\ 011\ 11\ 01\ 1\dot{1})_2$

$(Y_1)_4 = (1\ \ 0\ 1\ 3\ 2\ \ 1\ 3.\ 3\ 2\ 3\ \dot{2}\ 3\ 3\ 1\ \dot{3})_4$

$(1000\ 111100111.111011\dot{1}\ 011\dot{1})_2 = (1\ 000\ 111\ 100\ 111\ .111\ 011\ \dot{1}01\ 111\ 011\ 110\ 11\dot{1})_2$

$(Y_2)_8 = (1\ \ 0\ \ 7\ \ 4\ \ 7\ .\ 7\ \ 3\ \ \dot{5}\ \ 7\ \ 3\ \ 6\ \ \dot{7})_8$

$(1000111100111\ .1110111\dot{1}\ 011\dot{1})_2 = (1\ 0001\ 1110\ 0111\ .1110\ 11\dot{1}\ 0\ 1111\ 0111\ 1011\ 110\dot{1})_2$

$(Y_3)_{16} = (1\ \ \ 1\ \ \ E\ \ \ 7\ .\ \ E\ \ \ \dot{E}\ \ \ F\ \ \ 7\ \ \ B\ \ \dot{D})_{16}$

2.5(घ) चतुष् अंकीय प्रणाली से षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण :

(Transformation from Four Digit into Hexadecimal System)

यह रूपान्तरण निम्नवत् किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) दी गई संख्या के पूर्णांश एवं अपूर्णांश भाग को अलग–अलग लिखा जाता है। (2) पूर्णांश के दो–दो अंकों के जोड़े दायें से बायें बनाकर उन्हें षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरित कर लिया जाता है। यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट संख्या का पूर्णांश प्राप्त होता है। (3) पूर्णांश एवं अपूर्णांश को यथा स्थान लिखने पर अभीष्ट संख्या प्राप्त होती हैं।

उदाहरण (4) (अ) $(2313021)_4 = (Y)_{16}$ (ब) $(10021301\,.\,232\dot{1}\,3\dot{3})_4 = (Y)_{16}$

हल : $16 = 4^2$

(अ) $(2313021)_4 = (2\ 31\ 30\ 21)_4 = (2\,D\,C\,9)_{16}$

(ब) $(10021301\,.232\dot{1}\,3\dot{3})_4 = (10\ 02\ 13\ 01\,.\,23\ 21\dot{3}3\ 13\ 3\ \dot{1})_4$

$= (4\ \ 2\ \ 7\ \ 1\,.\,B\ \ 9\ \ \dot{F}\ \ 7\ \ \dot{D})_{16}$

2.5(ड़) षोडश अंकीय से द्विअंकीय एवं चतुष्अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण :
(Transformation from Hexadecimal into Binary and Four Digit System)

इसके क्रियापद निम्नवत् हैं:–

क्रियापद (Procedure) : (1) प्रदत्त संख्या के प्रत्येक अंक को द्विअंकीय अथवा चतुष्अंकीय प्रणाली में रूपान्तरित करने पर अभीष्ट संख्या प्राप्त हो जाती है। (2) द्विअंकीय प्रणाली में प्रत्येक अंक हेतु चार अंकों का समूह लिखा जाता है। (3) चतुष्अंकीय प्रणाली में प्रत्येक अंक हेतु दो अंको का समूह लिखा जाता है।

उदाहरण (5) (क) $(124\,A\,F\,09)_{16} = (Y_1)_2 = (Y_2)_4$

(ख) $(FO\,BD.\,ABC\dot{2}\,9\,A\dot{B})_{16} = (Y_1)_2 = (Y_2)_4$

हल: (क) $(1\,2\,4\,A\,F\,0\,9)_{16} = (10010\ 0100\ 1010\ 1111\ 0000\ 1001)_2$

$(Y_1)_2 = (1\ 00\ 10\ \ 01\ 00\ \ 10\ 10\ \ 11\ 11\ \ 00\ 00\ \ 10\ 01)_2$

$(Y_2)_4 = (1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 1)_4$

(ख) $(Y_1)_2 = (11\ 11\ 00\ 00\ 10\ 11\ 11\ 10\,.10\ 10\ 10\ 11\ 11\ 00\ \dot{0}\,0\ 10\ 10\ 01\ 10\ 10\ 10\ 1\dot{1})_2$

$(Y_2)_4 = (3\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 2\,.\,2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ \dot{0}\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ \dot{3})_4$

2.5(च) षोडश एवं चतुष्अंकीय प्रणाली से अष्ट अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण (Transformation from Hexadecimal and Four Digit into Octal Number System):

यह रूपान्तरण अधोखिलित ढंग से किये जाते हैं:–

क्रियापद (Procedure) : (1) सर्वप्रथम संख्या को द्विअंकीय प्रणाली में रूपान्तरित किया जाता है। (2) द्विअंकीय प्रणाली की संख्या को अष्टअंकीय प्रणाली में रूपान्तरित किया जाता है।

उदाहरण (6) अष्टअंकीय प्रणाली में रूपान्तरण करना।

(च) $(2F06B\,.\,AB\ \dot{0}\,C\,\dot{D})_{16}$ (छ) $(13031.\,01\dot{3}\ 021\dot{3})_4$

हल: (च) $(2F06B.AB\ \dot{0}\,C\,\dot{D})_{16} = (10\ 1111\ 0000\ 0110\ 1011.\ 1010\ 1011\ \dot{0}000\ 1100\ 111\dot{0})_2$

$= (101\ 111\ 000\ 001\ 101\ 011\,.\,101\ 010\ 110\ \dot{0}00\ 110\ 011\ 10\dot{0})_2$

$= (5\ \ 7\ \ 0\ \ 1\ \ 5\ \ 3\,.\,5\ \ 2\ \ 6\ \ \dot{0}\ \ 6\ \ 3\ \ \dot{4})_8$

(छ) $(13031.\,01\dot{3}\ 021\dot{3})_4 = (1\ 11\ 00\ 11\ 01\,.\,00\ 01\ \dot{1}\,1\ 00\ 10\ 01\ 1\dot{1})_2$

$= (111\ 001\ 101.\ 000\ 1\dot{1}\,1\ 001\ 001\ 111\ 100\ 100\ 111\ 110\ 010\ 01\dot{1})_2$

$= (7 \quad 1 \quad 5.0 \quad \dot{7} \quad 1 \quad 1 \quad 7\ 4 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 2 \quad \dot{3})_8$

2.5(छ) अष्टअंकीय प्रणाली से चतुष् एवं षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरण :

(Transformation from Octal into Four Digit and Hexadecimal Number System)

अष्ट अंकीय प्रणाली से रूपान्तरण निम्नवत् किया जाता हैः–

क्रियापद (Procedure) : (1) सर्वप्रथम प्रदत्त संख्या को द्विअंकीय प्रणाली में रूपान्तरण किया जाता है। (2) द्विअंकीय प्रणाली की संख्या को चतुष एवं षोडश अंकीय प्रणाली में रूपान्तरित किया जाता है।

उदाहरण (7) (प) $(7\,2\,3\,.\,0\,3\,\dot{2}\,1\,\dot{4})_8 = (Y)_4$ (फ) $(10\,52.05\dot{7}6\dot{3})_8 = (Y)_{16}$

हल : (प) $(7\,2\,3\,.\,0\,3\,\dot{2}\,1\,\dot{4})_8 = (111\ 010\ 011.\ 000\ 011\ \dot{0}10\ 001\ 10\dot{0})_2$

$= (1\ 11\ 01\ 00\ 11.\ 00\ 00\ 11\ \dot{0}1\ 00\ 01\ 10\ 0\dot{0}\ 1\dot{0})_2$

$= (1 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 3.0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad \dot{0} \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad \dot{2})_4$

(फ) $(10\,52.05\dot{7}6\dot{3})_8 = (1\ 000\ 101\ 010\ .000\ 101\ \dot{1}\ 11\ 110\ 01\dot{1})_2$

$=(10\ 0010\ 1010\ .\ 0001\ 0111\ \dot{1}\ 110\ 0111\ 1111\ 0011\ 1111\ 1001\ 1111\ 1100\ 1111)_2$

$= (2 \quad 2 \quad A. \quad 1 \quad 7 \quad \dot{E} \quad 7 \quad F \quad 3 \quad F \quad 9 \quad F \quad C \quad \dot{F})_{16}$

2.6 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{2} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{3} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{4} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{5} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{6} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124 ।

{7} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344 ।

{8} ए0 के0 शर्मा ,एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश,संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348 ।

{9} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb 2005, pp. 17-21.

{10} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp. 17-19.

{11} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{12} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{13} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{14} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{15} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

अध्याय तीन

मौलिक संक्रियायें
(Basic Operations)

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

3.2 जोड़ना (Addition)

(क) एकाधिक बिन्दु विधि (One More Point Method)

(ख) परममित्र अंक विधि (Best Friend Digit Method)

3.3 घटाना (Subtraction)

(क) परममित्र अंक विधि (Best Friend Digit Method)

(ख) योग विधि (Addition Method)

3.4 जोड़ने एवं घटाने की संक्रियाओं का अनुप्रयोग

(Application of Addition and Subtraction Operations)

(क) कई संख्याओं का योग एवं अन्तर ज्ञात करना

(Determine Addition and Subtraction of several Numbers)

(ख) मिश्रित संख्या में रूपान्तरण (Transformation in Mixed Number)

3.5 गुणन तालिका (Multiplication Table)

3.6 निष्कर्ष (Conclusion)

3.7 संदर्भ ग्रन्थ (References)

3.1 प्रस्तावना (Introduction):

विगत शताब्दी से जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में संगणक का उपयोग परिलक्षित होता है। यद्यपि जनसाधारण इसके लाभों से वंचित है तथापि वैज्ञानिकों, गणितज्ञों एवं भिन्न भिन्न क्षेत्रों में लगे तंत्रविदों के लिये संगणक आप सबके जीवन का एक महत्वपूर्ण हिस्सा हैं। संगणक द्वारा सभी प्रकार के कार्य द्विअंकीय प्रणाली में किये जाते हैं। संगणक की विभिन्न अंक प्रणालियाँ द्विअंकीय, चर्तुअंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडशअंकीय हैं। अंकों एवं संख्याओं का जन्म शून्य (0) से वैदिक गणित के ''एकाधिकेन पूर्वेण'' (पहले से एक अधिक द्वारा) सूत्र से होता है। किसी अंक या संख्या से एकाधिक करना ही जोड़ संक्रिया कहलाती है। इसको योग संक्रिया भी कहते हैं। स्पष्ट है कि एकाधिक करने से प्राप्त संख्या योगफल (जोड़फल) के नाम से पुकारी जाती है। अकों एवं संख्याओं को घटते हुए क्रम में वैदिक गणित के सूत्र ''एकन्यूनेन पूर्वेण'' (पहले से एक कम द्वारा) से रखा जाता है। किसी अंक या संख्या से एक कम करना ही घटाओ संक्रिया कहलाती है। इसको अन्तर संक्रिया भी कहते हैं। एक कम करने से प्राप्त संख्या घटाओफल या अन्तरफल कहलाती है।

प्रस्तुत अध्याय में संगणक की विविध अंक प्रणालियों में मूल मौलिक संक्रियाओं (योग एवं घटाना) की विवेचना वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता एवं सक्षमता को प्रकट करते हुये सोदाहरण की गई है। जोड़ने एवं घटाने की संक्रियाओं का अनुप्रयोग एवं गुणन तालिका प्राप्त करने की भी विवेचना इस अध्याय के अर्न्तगत की गई है। यहाँ वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों निखिलं नवतः चरमं दशतः (सभी को सर्वोच्च अंक से एवं अंतिम को आधार से घटाना), एकाधिकेन पूर्वेण (पूर्व से एक अधिक द्वारा), परावर्त्य योजयेत् एवं विलोकनम् का उपयोग {1–7} किया गया है।

3.2 जोड़ना (Addition):

दो या दो से अधिक संख्याओं का योगफल {8–12} निम्न विधियों द्वारा किया जाता है:–

3.2(क) एकाधिक बिन्दु विधि (One More Point Method) :

दो या दो से अधिक संख्याओं का योगफल निम्नवत् ज्ञात किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्याओं को स्थानानुसार लिखा जाता है। (2) प्रत्येक स्थान के अंकों को X^{-n} से X^{n} की ओर जोड़ा जाता है। (3) यदि दो अंकों a एवं b का योगफल आधार (X) के तुल्य या आधार से अधिक $(> X)$ (अर्थात $(a+b \geq X)$ होता है, तो b के बायीं ओर के अंक पर एक शुद्धीकरण बिन्दु लगाया जाता है। यथा $\dot{C}$। (4) शुद्धीकरण बिन्दु युक्त अंक का मान एक बढ़ जाता है अर्थात् $\dot{C} = C+1$।

(5) यदि दो अंकों $\bar{a}$ एवं $\bar{b}$ का योगफल $\bar{X}$ के तुल्य $\bar{X}$ से कम होता है।$((\bar{a}+\bar{b}) \le \bar{X})$ तो $\bar{b}$ के बायीं ओर के अंक को तारांकित (*) किया जाता है। (6) तारांकित अंक का मान एक कम हो जाता है। अर्थात $\overset{*}{C} = C + \bar{1}$ (7) यही प्रक्रिया सतत दुहरायी जाती है।

उदाहरण (1) (अ) X = 2, 10001 + 11001 + 10101 + 11100
(ब) X = 4, 230.32 + 211.33 + 320.21 + 220.33
(स) X =8, 24671 + 23437 + 56567 + 21732
(द) X =16, 98ABC + 10DEF + 8AFFE + AB543

हल : (अ) X=2,

$$\begin{array}{r} 10001 \\ \dot{0}110\dot{0}1 \\ 10101 \\ +\ \dot{0}\dot{0}\dot{1}\dot{1}100 \\ \hline 1011011 \end{array}$$

(ब) X=4,

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
230.32	1	2
$\dot{0}\dot{2}1\dot{1}.\dot{3}3$	1	$\bar{2}$
$\dot{0}32\dot{0}.21$	2	0
$+\dot{2}\dot{2}\dot{0}.\dot{3}3$	+1	+0
2310.11	2	0

(स) X=8,

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
24671	6	2
$23\bar{4}\bar{3}\bar{7}$	5	0
$\dot{0}\dot{5}6\bar{5}\bar{6}^{\cdot}\bar{7}$	7	7
$+21^{*}\bar{7}32$	+1	+7
$145\bar{2}0\bar{3}$	5	7

योगफल= $(145\bar{2}0\bar{3})_8 = (144575)_8$

(द) X=16,

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
98ABC	5	C
$1\dot{0}\dot{D}\dot{E}F$	D	F
$\dot{8}\dot{A}\dot{F}\dot{F}E$	2	C
$+\dot{0}AB543$	+3	+3
1DFDEC	8	8

उपर्युक्त संख्याओं को मिश्रित संख्या में परिवर्तित करके भी योगफल ज्ञात किया जा सकता है। यथा :

$$\begin{array}{r} 1\bar{6}\bar{7}\bar{5}\bar{4}\bar{4} \\ 11\bar{2}\bar{1}\bar{1} \\ 1\bar{7}\bar{5}00\bar{2} \\ 1^{*}\bar{5}^{*}\bar{5}543 \\ \hline 2\bar{2}0\bar{2}\bar{1}\bar{4} \end{array}$$

योगफल = $(2\bar{2}0\bar{2}\bar{1}\bar{4})_{16} = (1DFDEC)_{16}$

3.2(ख) परममित्र अंक विधि (Best Friend Digit Method) :

दो संख्याओं का योगफल निम्नवत् ज्ञात किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्याओं को स्थानानुसार लिखा जाता है। (2) प्रत्येक स्थान के अंकों को X^{-n} से X^{n} की ओर जोड़ा जाता है। (3) यदि जोड़े जाने वाला अंक, अंक के परममित्र अंक से छोटा है, तो दोनों अंकों को जोड़ा जाता है। (4) यदि जोड़ा जाने वाला अंक अंक के परममित्र अंक के तुल्य अथवा बड़ा होता है, तो बायीं ओर के अंक पर शुद्धीकरण बिन्दु ($\dot{0}$) प्रयुक्त किया जाता है तथा परममित्र अंक को घटाकर आगे की गणनायें की जाती हैं। (5) यही प्रक्रिया सतत दुहरायी जाती है।

उदाहरण (2) (च) $X = 8, 2471 + 3567 + 5073 + 6346$

(छ) $X = 16, 4D.8AB + 96.FEA + AF.BDC + 87.A10$

हल : (च) $X = 8,$

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
2 4 7 1	7	$\bar{4}$
$\dot{3}\ \dot{5}\ \dot{6}\ 7$	7	3
$\dot{0}5\ \dot{0}\ 7\ 3$	1	0
$+\ \dot{0}\ 6\ \dot{3}\ \dot{4}\ 6$	+5	$+\ \bar{1}$
2 1 7 2 1	6	$\bar{2}+11 = 7$

(छ) $X = 16,$

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
4 D . 8 A B	1	4
$\dot{9}\ \dot{6}\ .\ \dot{F}\ \dot{E}\ A$	9	E
$\dot{0}\ \dot{A}\ \dot{F}\ .\ \dot{B}\ \dot{D}\ C$	1	5
$+\ \dot{0}\ 8\ 7\ .\ A\ 1\ 0$	+B	+A
2 1 B . E 8 1	7	C

3.3 घटाना (Subtraction) :

दो संख्याओं का अन्तर निम्न विधियों द्वारा {13–17} ज्ञात किया जाता है:–

3.3(क) परममित्र अंक (Best Friend Digit Method) :

इस विधि से दो संख्याओं का अन्तर निम्नवत् ज्ञात किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्याओं को स्थानानुसार लिखा जाता है। (2) प्रत्येक स्थान के अंकों X^{-n} से X^{n} की ओर घटाया जाता है। (3) यह सुनिश्चित करना कि घटाया जाने वाला अंक बड़ा है अथवा नहीं। (4) यदि नहीं हो ऊपर के अंक से घटाते हैं। (5) यदि हाँ तो बायीं ओर के अंक पर शुद्धीकरण बिन्दु ($\dot{0}$) लगायें तथा परममित्र अंक एवं ऊपर के अंक का योगफल लिखा जाता है। (6) प्रत्येक स्थान हेतु यही क्रिया दुहरायी जाती है।

(7) शुद्धीकरण बिन्दु युक्त अंक का मान एक बढ़ जाता है।

उदाहरण (3) (अ) X=2, 11001.001 - 1101.101 (ब) X=4, 32103 - 23122
(स) X=8, 536.04 - 275.75 (द) X=16, FABC8409 - ADBE5984

हल : (अ) X=2,

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,0\,1.0\,0\,1 \\ -\;\dot{0}\,\dot{1}\,\dot{1}\,\dot{0}\,\dot{1}.1\,0\,1 \\ \hline 0\,1\,0\,1\,1.1\,0\,0 \\ \hline \end{array}$$

(ब) X=4,

$$\begin{array}{rcc} & \text{बीजांक} & \text{वैकल्पिक बीजांक} \\ 3\,2\,1\,0\,3 & 3 & 0 \\ -\;\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{1}\,2\,2 & -1 & -0 \\ \hline 2\,3\,2\,1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(स) X=8,

$$\begin{array}{rcc} & \text{बीजांक} & \text{वैकल्पिक बीजांक} \\ 5\,3\,6.0\,4 & 4 & \bar{3} \\ -\;\dot{2}\,7\,\dot{5}.\dot{7}\,5 & -5 & -2 \\ \hline 2\,4\,0.0\,7 & \bar{1}+7=6 & \bar{5}+11=C \\ \hline \end{array}$$

(द) X=16,

$$\begin{array}{rcc} & \text{बीजांक} & \text{वैकल्पिक बीजांक} \\ F\,A\,B\,C\,8\,4\,0\,9 & A & 1 \\ -\;\dot{A}\,\dot{D}\,\dot{B}\,E\,\dot{5}\,\dot{9}\,8\,4 & -E & -6 \\ \hline 4\,C\,F\,E\,2\,A\,8\,5 & \bar{4}+F=B & \bar{5}+11=C \\ \hline \end{array}$$

3.3(ख) योग विधि (Addition Method) :

योग विधि द्वारा दो संख्याओं का अन्तर ''परावर्त्य योजयेत'' द्वारा अधोलिखित ढंग से किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्याओं को स्थानानुसार लिखा जाता है। (2) घटायी जाने वाली संख्याओं को रेखांक के रूप में परिवर्तित किया जाता है। (3) प्रत्येक स्थान के अंकों को जोड़ा जाता है। (4) यदि मिश्रित संख्या प्राप्त हो, तो उसे साधारण संख्या में परिवर्तित कर किया जाता है।

उदाहरण (4) (अ) X=2, 10 11 0 11 – 10 11 0 1 0 (ब) X=4, 320331 - 131233
(स) X=8, 7051.3462 - 5163.2575 (द) X=16, ABC10.23 - 1CD32.4F

हल : (अ) X=2,

$$\begin{array}{r} 1\;0\;1\;1\;0\;1\;1\;1 \\ +\quad \bar{1}\;0\;\bar{1}\;\bar{1}\;0\;\bar{1}\;0 \\ \hline 1\;\bar{1}\;1\;0\;\bar{1}\;1\;0\;1 \\ \hline \end{array}$$

अन्तरफल $= (1\;\bar{1}\;1\;0\;\bar{1}\;1\;0\;1)_2 = (1\,0\,1\,1\,1\,0\,1)_2$

(ब) X=4,

$$\begin{array}{rcc} & \text{बीजांक} & \text{वैकल्पिक बींजांक} \\ 3\;2\;0\;3\;3\;1 & 3 & 0 \\ +\;\bar{1}\;\bar{3}\;\bar{1}\;\bar{2}\;\bar{3}\;\bar{3} & +\bar{1} & +\bar{3} \\ \hline 2\;\bar{1}\bar{1}\;1\;0\;\bar{2} & 2 & \bar{3}+11=2 \\ \hline \end{array}$$

अन्तरफल $= (2\;\bar{1}\bar{1}\;1\;0\bar{2})_4 = (1\,2\,3\,0\,3\,2)_4$

(स) X=8,

	बीजांक	वैकल्पिक बींजांक
7051.3462	7	$\bar{3}$
$+\bar{5}\bar{1}\bar{6}\bar{3}.\bar{2}\bar{5}\bar{7}\bar{5}$	$+\bar{6}$	$+6$
$2\bar{1}\bar{1}\bar{2}.1\bar{1}\bar{1}\bar{3}$	1	3

अन्तरफल $= (2\bar{1}\bar{1}\bar{2}.1\bar{1}\bar{1}\bar{3})_8 = (1666.0665)_8$

(द) X=16,

	बीजांक	वैकल्पिक बींजांक
$ABC10.23$	9	$\bar{B}$
$+\bar{1}\bar{C}\bar{D}\bar{3}\bar{2}.\bar{4}\bar{F}$	$+\bar{5}$	$+C$
$9\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}.\bar{2}\bar{C}$	4	1

अन्तरफल $= (9\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}.\bar{2}\bar{C})_{16} = (8EEDD.D4)_{16}$

3.4 जोड़ने एवं घटाने की संक्रियाओं का अनुप्रयोग :
(Application of Addition and Subtraction Operations)

जोड़ने एवं घटाने की संक्रियाओं का अनुप्रयोग दो ढंग से किया जा सकता है:–

3.4(क) कई संख्याओं का योग एवं अन्तर ज्ञात करना :
(Determine Addition and Subtraction of Several Numbers)

कई संख्याओं का योग एवं अन्तर निम्नवत् ज्ञात किया जाता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्याओं को स्थानानुसार लिखा जाता है। (2) जिन संख्याओं को घटाना होता है, उनको रेखांक के रूप में लिखा जाता है। (3) स्थानानुसार अंकों को जोड़ा जाता है।

उदाहरण (5) (य) X = 16, 58ABC.DF - 69EA.BCD + 568.0468 – FABC.8D + 103AF.A-903.ABC (र) X = 8, 237.67 – 42.631 + 560.521 + 27.654 – 327.5

हल : (य) X = 16

	बीजांक	वैकल्पिक बींजांक
$58ABC.DF$	E	$\bar{A}$
$\bar{6}\bar{9}\bar{E}\bar{A}.\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{F}$	$\bar{D}$
0568.0468	7	$\bar{D}$
$\bar{F}\bar{A}\bar{B}\bar{C}.\bar{8}\bar{D}$	$\bar{9}$	1
$103AF.A$	9	1
$+\bar{9}0\bar{3}.\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$+\bar{F}$	$+1$
$6\bar{D}\bar{A}2A.\bar{7}\bar{2}\bar{3}8$	6	1

योगफल $= (6\bar{D}\bar{A}2A.\bar{7}\bar{2}\bar{3}8)_{16} = (52629.8DD8)_{16}$

(र) X = 8

	बीजांक	वैकल्पिक बीजांक
$2\,37\,.67$	4	$\bar{7}$
$\overline{42}.\bar{3}\bar{6}\bar{1}$	$\bar{2}$	0
$5\,6\dot{0}.52\,1$	5	5
$\dot{0}\,\dot{0}\,\dot{2}7.\dot{6}54$	3	0
$+\ \overline{327}\cdot\bar{5}$	$+\ \bar{3}$	3
$1\bar{3}\overline{22}\cdot 204$	7	1

योगफल = $(1\bar{3}\overline{22}\cdot 204)_8 = (4\,5\,6\,.\,204)_8$

3.4(ख) मिश्रित संख्या में रूपान्तरण (Transformation in Mixed Number) :

किसी संख्या का मिश्रित संख्या में रूपान्तरण निम्नवत् किया जा सकता है:–

क्रियापद (Procedure) : (1) संख्या को स्वयं संख्या में जोड़कर योगफल ज्ञात किया जाता है।

(2) संख्या को रेखांकित करके उपर्युक्त योगफल में जोड़ने पर मिश्रित संख्या प्राप्त होती है ।

उदाहरण (6) मिश्रित संख्या में रूपान्तरण करना।

(क) $(58FBC.DF)_{16}$ (ख) $(67.0521)_8$

हल :(क) X=16,

$$\begin{array}{r} 58FBC.DF \\ +\ \dot{5}\dot{8}\dot{F}\dot{B}\dot{C}.\dot{D}F \\ \hline B1F79.BE \end{array} \qquad \begin{array}{r} B1F79.BE \\ +\ \overline{58FBC}.\overline{DF} \\ \hline 6\bar{7}0\bar{4}\bar{3}.\bar{2}\bar{1} \end{array}$$

(ख) X=8

$$\begin{array}{r} 67.0521 \\ +\ \dot{0}\dot{6}7.\dot{0}521 \\ \hline 156.1242 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 156.1242 \\ +\ \bar{6}\bar{7}.0\bar{5}\bar{2}\bar{1} \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}.1\bar{3}21 \end{array}$$

3.5 गुणन तालिका (Multiplication Table) :

साधारण संख्या को मिश्रित संख्या में रुपान्तरित करके संख्या की गुणन तालिका तुरन्त प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण (7) (क) $(2333)_4$ (ख) $(7677)_8$ (ग) $(FEFFEF)_{16}$

हल : (क) $(2333)_4 = (1\bar{1}\,0\,0\,\bar{1})_4$

क्रमांक	1	$\bar{1}$	0	0	$\bar{1}$
1	0	2	3	3	3
2	1	2	3	3	2
3	2	0	3	3	1
10	2	(-)3	3	3	0

(ख) $(7677)_8 = (1 0 \bar{1} 0 \bar{1})_8$

क्रमांक	1	0	$\bar{1}$	0	1
1	0	7	6	7	7
2	1	7	5	7	6
3	2	7	4	7	5
4	3	7	3	7	4
5	4	7	2	7	3
6	5	7	1	7	2
7	6	7	0	7	1
10	7	6	(-) 7	7	0

(ग) $(\text{FE FFEF})_{16} = (1\ 0\ \bar{1}\ 00\ \bar{1}\ \bar{1})_{16}$

क्रमांक	1	0	$\bar{1}$	0	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$
1	0	F	E	F	F	E	F
2	1	F	D	F	F	D	E
3	2	F	C	F	F	C	D
4	3	F	B	F	F	B	C
5	4	F	A	F	F	A	B
6	5	F	9	F	F	9	A
7	6	F	8	F	F	8	9
8	7	F	7	F	F	7	8
9	8	F	6	F	F	6	7
A	9	F	5	F	F	5	6
B	A	F	4	F	F	4	5
C	B	F	3	F	F	3	4
D	C	F	2	F	F	2	3
E	D	F	1	F	F	1	2
F	E	F	0	F	F	0	1
10	F	E	(-)F	E	E	(-) F	0

3.6 निष्कर्ष (Conclusion) :

पूर्वोक्त प्रकरणों से स्वयंसिद्ध है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के प्रयोग से गणित की मूल संक्रियाऐं अत्यन्त सरल एवं सुस्पष्ट हो जाती हैं। गणनाओं की प्रचलित विधियों की व्याख्या भी इनके द्वारा संभव है। घटाने की संक्रिया में योग विधि द्वारा ''परावर्त्य योजयेत'' सूत्र से दूसरी संख्या के सभी अंकों को परावर्त करके प्रत्येक स्थान के अंकों पर जोड़ने की संक्रिया 'एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र से कम समय में की जा सकती है। किसी भी अंक प्रणाली में, साधारण संख्या को मिश्रित संख्या में रुपान्तरित करके संख्या की गुणन तालिका तुरन्त प्राप्त की जा सकती है। वास्तव में वैदिक गणित के सूत्र गणनाओं के लिये सहज एवं सशक्त विकल्प प्रस्तुत करते हैं। सर्वथा प्रयुक्त परीक्षण पद्धति के कारण गणनाओं में रोचकता बढ़ जाती है।

उपर्युक्त विवेचन से सुस्पष्ट है कि एतद दृष्टया तंत्रजाल एवं आज्ञावलि विकसित करने पर संगणकीय समय की गई गुना बचत की जा सकती है तथा उसकी क्षमता को अनेकों गुना बढ़ाया जा सकता है।

3.7 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{2} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{3} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{4} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{5} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{6} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings), Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{7} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{8} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{9} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{10} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{11} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{12} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp.17-19.

{13} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{14} ए० के० शर्मा, एस० के० श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ० 345–348।

{15} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ० 119–124।

{16} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{17} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

अध्याय चार

गुणन
(Multiplication)

प्रकाशन (Publication)

- षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0 119–124।
- Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampada, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत्, उर्ध्वतिर्यम्याम, आनुरूप्येण, यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्, विलोकनम् एवं आनुरूप्येण आदि।

4.1 प्रस्तावना **(Introduction)**

4.2 समान आधार संख्या से विचलन विधि

(Deviation Method from Equal Base Number)

(अ) दो संख्याओं का गुणन (Multiplication of Two Numbers)

(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three Numbers)

(स) चार संख्याओं का गुणन (Multiplication of Four Numbers)

(द) पाँच संख्याओं का गुणन (Multiplication of five Numbers)

4.3 समान उपाधार संख्या से विचलन विधि

(Deviation Method from Equal Subbase Number)

(अ) दो संख्याओं का गुणन (Multiplication of Two numbers)

(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three numbers)

(स) चार संख्याओं का गुणन (Multiplication of Four numbers)

(द) पाँच संख्याओं का गुणन (Multiplication of Five numbers)

4.4 उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि **(Vertically and Cross wise Method)**

(अ) दो संख्याओं का गुणन(Multiplication of Two Numbers)

(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three Numbers)

4.5 मिश्रित गुणन **(Mixed Multiplication)**

4.6 निष्कर्ष **(Conclusion)**

4.7 संदर्भ ग्रन्थ **(References)**

4.1 प्रस्तावना (Introduction):

एक ही अंक या संख्या को स्वयं में एक या एक से अधिक बार जोड़ने की क्रिया को संक्षेप में गुणन कहा जाता है। किसी अंक या संख्या को जितनी बार जोड़ा जाता है उसको व्यक्त करने के लिए अंक या संख्या एवं बार के बीच '×' (गुणन का चिन्ह) लगाकर संक्षेप में व्यक्त करते हैं। अंक या संख्या को एक या कई बार जोड़ने से प्राप्त योगफल दोनों अकों या संख्याओं का गुणनफल कहलाता है।

प्रस्तुत अध्याय में वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एक न्यूनेन पूर्वेण, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, विलोकनम् एवं आनुरूप्येण का उपयोग {1–5} करते हुये समान उपाधार संख्या वाली दो, तीन, चार एवं पाँच संख्याओं के गुणन, समान आधार वाली संख्या दो, तीन, चार एवं पाँच संख्याओं के गुणन तथा भिन्न आधार अथवा उपाधार संख्या वाली दो एवं तीन संख्याओं के गुणन को संगणक की विभिन्न अंक प्रणालियों (द्विअंकीय, चर्तुअंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडशअंकीय) में सोदाहरण किया गया है। गुणन तालिकायें परिशिष्ट (3) में दी गई हैं।

4.2 समान आधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Base Number)

प्रत्येक संख्या का आधार संख्या से विचलन ज्ञात किया जाता है जितनी संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना होता है, गुणनफल में उतने ही भाग {6–10} होते हैं। गुणनफल के बायें भाग को छोड़कर शेष भागों में आधार संख्या में शून्यों की संख्या के तुल्य अंक होते हैं, अतिरिक्त अंक बायीं ओर लिखे जाते हैं। इस विधि की उपपत्ति {2} परिशिष्ट 4(क) में दी गयी है।

4.2(अ) दो संख्याओं का गुणन (Multiplication of Two Numbers) :

इसमें दो भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग =आधार संख्या + दोनों विचलनों का योगफल
(2) दायाँ भाग = दोनों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (1) (य) X = 16, (1003)(1005) (र) X = 16, (100F) (100A)
(ल) X = 16, (FFFFC)(FFFAB)

हल : (य) X = 16,आधार संख्या =1000,

संख्या	विचलन	बीजांक
1003	003	4
1005	005	6
1008 | 00F		9

गुणनफल = $(100800F)_{16}$

(र) X = 16, आधार संख्या = 1000

संख्या	विचलन	बीजांक
100F	00F	1
100A	00A	B
1019 | 096		B

गुणनफल =1019096

(ल) X = 16, आधार संख्या = 100000

संख्या	विचलन	बीजांक
FFFFC	$0000\bar{4}$	C
FFFAB	$000\bar{5}\bar{5}$	6
$1000\bar{5}\bar{9}$ | 00154		C

गुणनफल = $1000\bar{5}\bar{9}00154$ = FFFA700154

4.2(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three Numbers) :

इसमें तीन भाग होते है, जो निम्नवत् हैं: –

(1) बायाँ भाग = आधार संख्या + तीनों विचलनों का योगफल (2) मध्य भाग =दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योगफल, (3) दायाँ भाग =तीनों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (2) (य) X = 16,(1001)(100B)(100D) (र) X = 16, (1005)(100C)(100E)
(ल) X = 16, (FFB)(FFD)(FF2) (न) X = 8, (76)(102)(74)

हल : (य) X = 16, आधार संख्या = 1000

संख्या	विचलन	बीजांक
1001	001	2
100B	00B	C
100D	00D	E
1019 | 0A7 | 08F		6

गुणनफल = 10190A708F

(र) X = 16, आधार संख्या = 1000

संख्या	विचलन	बीजांक
1005	005	6
100C	00C	D
100E	00E	F
101F | 12A | 348		F

गुणनफल = 101F12A348

(ल) X = 16, आधार संख्या = 1000

संख्या	विचलन	बीजांक
FFB	$00\bar{5}$	B
FFD	$00\bar{3}$	D
FF2	$00\bar{E}$	2
$10\bar{1}\bar{6}$ | 07F | $0\bar{D}\bar{2}$		1

गुणनफल = $10\bar{1}\bar{6}07F0\bar{D}\bar{2}$ = FEA07EF2E

(न) X = 8, आधार संख्या = 100

संख्या	विचलन	बीजांक
76	$0\bar{2}$	6
102	02	3
74	$0\bar{4}$	4
$74 \mid 0\bar{4} \mid 20$		2

गुणनफल $= (740\bar{4}20)_8 = (737420)_8$

4.2(स) चार संख्याओं का गुणन (Multiplication of Four Numbers) :

इसमें चार भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = आधार संख्या + चारों विचलनों का योगफल (2) परिबायाँ भाग = दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योगफल (3) पूर्व दायाँ भाग = तीन–तीन विचलनों के गुणनफलों का योगफल (4) दायाँ भाग = चारों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (3) (य) X= 4, (103)(102)(101)(110) (र) X=16, (1002)(1003)(1004)(1001)
(ल) X=16, (100E)(FFB)(FFD)(FF2) (न) X= 16, (1002)(100A)(100E)(100F)

हल :(य) X = 4, आधार संख्या = 100

संख्या	विचलन	बीजांक
103	03	1
102	02	3
101	01	2
110	10	2
122 | 03 | 02 | 20		3
2 3 1		

गुणनफल $= (130120320)_4$

(र) X = 16, आधार संख्या = 1000

संख्या	विचलन	बीजांक
1002	002	3
1003	003	4
1004	004	5
1001	001	2
100A | 023 | 032 | 018		F

गुणनफल = 100A023032018

(ल) X = 16, आधार संख्या =1000

संख्या	विचलन	बीजांक
100E	00E	F
FFB	$00\bar{5}$	B
FFD	$00\bar{3}$	D
FF2	$00\bar{E}$	2
$100\bar{8} \mid \bar{1}4B \mid 620 \mid \bar{B}\,\bar{7}\,\bar{C}$		F

अभीष्ट गुणनफल $= 100\bar{8}\,\bar{1}4B620\bar{B}\,\bar{7}\,\bar{C}$ = FF7F4B61F484

(न) X = 16, आधार संख्या =1000

संख्या	विचलन	बीजांक
1002	002	3
100A	00A	B
100E	00E	F
100F	00F	1
1029 | 242 | CIC | 068		F
1		

गुणनफल = 1029242CID068

4.2(द) पाँच संख्याओं का गुणन (Multiplication of five numbers) :

इसमें पाँच भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = आधार संख्या + पाँचों विचलनों का योगफल (2) परिबायाँ भाग = दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योगफल (3) मध्य भाग = तीन–तीन विचलनों के गुणनफलों का योगफल
(4) पूर्व दायाँ भाग = चार–चार विचलनों के गुणनफलों का योगफल
(5) दायाँ भाग = पाँचों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (4) X = 16, (100A)(100E)(FFD)(FF2)(FFB)

हल : X = 16, आधार संख्या = 1000,

संख्या	विचलन
100A	00A
100E	00E
FFD	$00\bar{3}$
FF2	$00\bar{E}$
FFB	$00\bar{5}$

$1002 | \bar{1}\,\bar{1}B | \bar{1}1\bar{2} | 2\bar{4}4 | \bar{2}\,\bar{D}\,\bar{8}$

$\qquad\qquad 3 \quad \bar{7}$

गुणनफल = $1002\bar{1}\,\bar{1}B\bar{1}112\bar{4}\,\bar{3}\,\bar{2}\,\bar{D}\,\bar{8}$ = 1001EFAF111BCD28

4.3 समान उपाधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

प्रत्येक संख्या का उपाधार संख्या से विचलन ज्ञात किया जाता है जितनी संख्याओं का गुणन ज्ञात करना होता है गुणनफल में उतने ही भाग होते हैं। गुणनफल के बायें भाग को छोड़कर शेष भागों में आधार संख्या में शून्यों की संख्या के तुल्य अंक होते हैं। अतिरिक्त अंक बायीं ओर जोड़े जाते हैं। उपाधार संख्या एवं आधार संख्या का अनुपात ज्ञात किया जाता है। इस विधि की उपपत्ति {2} परिशिष्ट 4(ख) में दी गयी है।

4.3(अ) दो संख्याओं का गुणन (Multiplication of Two Numbers) :

इसमें दो भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = (अनुपात) (उपाधार संख्या + तीनों विचलनों का योग)
(2) दायाँ भाग = दोनों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (1) (य) X =16, (200A)(200D) (र) X=16, (2001)(200C)
(ल) X =16, (3002)(2EEF)

हल : (य) X = 16, उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
200A	+ 00A
200D	+ 00D

2 (2017) | 082 — गुणनफल = 402E082

(र) X = 16, उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
2001	+ 001
200C	+ 00C

2 (200D) | 00C — गुणनफल = $(401A00C)_{16}$

(ल) X = 16, उपाधार संख्या = 3000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 3

संख्या	विचलन
3002	+ 0 0 2
2EEF	$\bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}$

$3(3\bar{1}\bar{1}1)\ |\ \bar{2}\bar{2}\bar{2}$ — गुणनफल = $9\bar{3}\bar{3}3\bar{2}\bar{2}\bar{2} = (8CD2DDE)_{16}$

4.3(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three Numbers) :

इसमें तीन भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^2$ (उपाधार संख्या + तीनों विचलनों का योग)
(2) मध्य भाग = अनुपात (दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योगफल)
(3) दायाँ भाग = तीनों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (2) (य) X=8, (3667)(4003)(3764) (र) X = 16, (3002)(2EEF)(3001)
(ल) X =16, (200C)(1EEF)(200B) (व) X=16, (200D)(200E)(2001)

हल :(य) X=8, उपाधार संख्या = 4000, आधार संख्या =1000, अनुपात =4

संख्या	विचलन
3667	$\bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}$
4003	0 0 3
3764	$0\ \bar{1}\ \bar{4}$

$20\ (4\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2})\ |4\ (12\bar{2}\bar{3})\ |5104$

गुणनफल = $10\bar{2}\bar{4}\bar{4}47\ \bar{1}\ 1104 = 75344671104$

(र) X = 16, उपाधार संख्या = 3000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 3

संख्या	विचलन
3002	0 0 2
2EEF	$\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$
3001	0 01

$3^2(3\,\bar{1}\,\bar{1}\,2)\,|\,3(\bar{3}\,\bar{3}\,\bar{1})\,|\,\bar{2}\,\bar{2}\,\bar{2}$

गुणनफल = $1B\bar{9}\,\bar{8}\,2\,\bar{9}\,\bar{9}\,\bar{3}\,\bar{2}\,\bar{2}\,\bar{2}$ = 1A68166CDDE

(ल) X = 16, उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या=1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
200C	0 0 C
1EEF	$\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$
200B	0 0 B

$2^2(2\,\bar{1}\,06)\,|\,2(\bar{1}\,\bar{8}\,0\,\bar{3})\,|\,\bar{8}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{4}$

गुणनफल = $8\bar{4}1500\bar{E}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{4}$ = 7C14FF133C

(व) X = 16, उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
200D	00D
200E	00E
2001	001

2^2 (201C) | 2(0D1) | 0B6 गुणनफल = 80701A20B6

4.3(स) चार संख्याओं का गुणन (Multiplication of Four Numbers) :

इसमें चार भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^3$ (उपाधार संख्या + चारों विचलनों का योगफल)

(2) परिबायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^2$ (दो–दो विचलनों का गुणनफल का योगफल)

(3) पूर्व दायाँ भाग = (अनुपात) (तीन–तीन विचलनों के गुणनफलों का योगफल)

(4) दायाँ भाग = चारों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (3) (य) X=16, (2001)(2002)(200A)(200B)

(र) X=16,(300A)(300C)(300C)(3003)

हल : (य) X = 16, उपाधार संख्या = 2000,आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
2001	001
2002	002
200A	00A
200B	00B

2^3(2018) | 2^2(0AF) | 2(174) | 0DC गुणनफल = $(100C02BC2E80DC)_{16}$

(र) X = 16, आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 3000, अनुपात = 3

संख्या	विचलन
300A	00A
300C	00C
3001	001
3003	003

2^3(301A) | 2^2(0D3) | 2(222) | 168

गुणनफल = 180D034C444168

4.3(द) पाँच संख्याओं का गुणन (Multiplication of Five Numbers) :

इसमें पाँच भाग होते हैं, जो निम्नवत् हैंः–

(1) बायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^4$ (आधार संख्या + पाँचों विचलनों का योगफल)
(2) परिबायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^3$ (दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योगफल)
(3) मध्य भाग = $(\text{अनुपात})^2$ (तीन–तीन विचलनों के गुणनफलों का योगफल)
(4) पूर्व दायाँ भाग = (अनुपात) (चार–चार विचलनों के गुणनफलों का योगफल)
(5) दायाँ भाग = पाँचों विचलनों का गुणनफल

उदाहरण (4) X = 16, (2001)(2003)(200A)(200B)(200D)

हल : X = 16, उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

संख्या	विचलन
2001	001
2003	003
200A	00A
200B	00B
200D	00D

2^4(2026) | 2^3(20A) | 2^2(BF8) | 2(1AD5) | 10C2

20260 | 050 | FE0 | 5AA | 0C2

   1   2   3   1

अभीष्ट गुणनफल = 20261052FE35AB0C2

4.4 उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि (Vertically and Crosswise Method) :

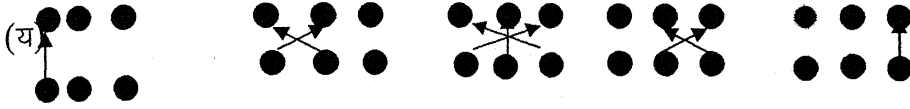
गुणन की एक अंकीय उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि से सभी सुपरिचित हैं। यहाँ पर बहुअंकीय उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि की चर्चा की गई है। इसका उपयोग प्रत्येक संख्या पद्धति की संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने में किया जा {11–18} सकता है। क्रियापद निम्नवत् हैंः–

प्रत्येक संख्या के अंकों के समूह, अंकों की संख्या समान हो बनाये जाते हैं। बायीं ओर के समूह में संख्या कम भी हो सकती है। एक अंकीय उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि की भांति समूहों के मध्य गुणन संक्रिया की जाती है। प्रत्येक स्थान पर दायीं ओर के समूह में अंकों की संख्या के तुल्य अंक

लिखे जाते हैं। अतिरिक्त अंक बायीं ओर जुड़ जाते हैं। इस विधि की उपपत्ति {2} परिशिष्ट 4(ग) में दी गयी है।

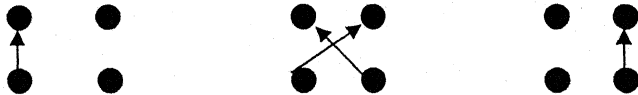
4.4(अ) दो संख्याओं का गुणन (Multiplication of Two Numbers) :

उदाहरण (1) (य) X = 16, (200A0B) (FC68ED) (र) X= 8, (2307)(4056)

(य)

10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
						2	0	0	A	0	B
						F	C	6	8	E	D
1F		97		04		91		C4		2F	

गुणनफल = 1F9 70 491C4 2 F

(र) X= 8, (2307)(4056)

दो अंकों का समूह मानकर

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	बीजांक
	2	3	0	7	5
	4	0	5	6	1
1 1	61	1 7	02		5

गुणनफल = 11611702

(ल) X = 16, (1 0AC)(2CBA)

10^3	10^2	10^1	10^0
1	0	A	C
2	C	B	A
2 C0	9 0	F	8
1D	7 C		
2 D E 0 C		F	8

गुणनफल =2 D E 0 C F 8

(म) X =2, (100110001) (110001001)

1	0011	0001
1	1000	1001
11011 0010	0011	1001
10 10		
1 1101 0100	0011	1001

गुणनफल = $(11101010000111001)_2$

4.4(ब) तीन संख्याओं का गुणन (Multiplication of Three Numbers) :

उदाहरण (2) (य) X = 16, (A B)(D E)(2 C) (र) X = 16, (A 0 B1)(1A2B)(2B C3)

हल : (य) $10^3\ 10^2\ 10^1\ 10^0$

```
    A  B
    D  E
    2  C
---------
1 9 7 C B 8
```

गुणनफल = 197CB8

(र) X = 16, (A 0 B1)(1A2B)(2B C3)

```
A 0       B 1
1 A       2 B
2 B       C 3
-------------
2 CED090EC71
```

गुणनफल = 2CED090EC71

4.5 मिश्रित गुणन (Mixed Multiplication) :

उदाहरण (1) (य) X=16, (BC)(F8) + (AD)(6E)

(र) X=16, (F3) (B2) + (36) (CD) - (F6) (AE)

हल: (य)X=16, X^2 $X^1 X^0$ X^1X^0

```
          B C          A D
          F 8    +     6 E
--------------
E 1 6 6
  E 1
1 1
--------------
1 0 0 7 6
```

(र) X=16, X^2 X^1 X^0 X^1 X^0 X^1 X^0

```
     F   3            3   6        F   6
     B   2   +        C   D    -   A   E
--------------------------
3    3   0   0
     A
1̄
--------------------------
2    D   0   0
```

उदाहरण (2) (य) $(100A)_{16}\ (1003)_{16} + (100F)_{16}\ (1009)_{16} - (100B)_{16}\ (100C)_{16}$

(र) $(10002)_4\ (10003)_4 - (1006)_8\ (1007)_8 + (100A)_{16}\ (100B)_{16}$

(ल) $(1001001)_2\ (1010101)_2 + (2321)_4\ (3201)_4 - (217)_8\ (302)_8 + (2F)_{16}\ (AB)_{16}$

हल: (य) X=16,

```
100A        100F       100B
1003  +     1009  -    100C
--------
100E021
```

(र) $(10002)_4 \quad (1006)_8 \quad (100A)_{16}$

$(10003)_4 - (1007)_8 + (100B)_{16}$

$(10\bar{2}\,4\bar{5}56)_{16}$

(ल) $(1001001)_2 \quad (2321)_4 \quad (217)_8 \quad (2F)_{16}$

$(1010101)_2 + (3201)_4 - (302)_8 + (AB)_{16}$

$(6D7D)_{16}$

4.6 निष्कर्ष (Conclusion) :

गुणन संक्रिया में वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों का प्रयोग करने से संगणकीय समय की गई गुना बचत की जा सकती है। विचलन विधि में दो या दो से अधिक संख्याओं का गुणन एक साथ ज्ञात किया जाता है, जितनी संख्याओं का गुणन करते हैं गुणनफल में उतने ही भाग होते हैं। उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि से किसी भी प्रकार की संख्यायें लेकर गुणन किया जा सकता है। मिश्रित गुणन में विभिन्न अंक प्रणालियों की संख्याओं को एक साथ लेकर गुणा, जोड़ एवं घटाने की संक्रिया करते हुये किसी विशेष अंक प्रणाली में परिणाम अत्यल्प क्रियापदों की संख्या में निकाला जा सकता है। उपर्युक्त विवेचन से सुस्पष्ट है कि एतद दृष्टया तंत्रजाल एवं आज्ञावलि विकसित करने पर संगणकीय समय की गई गुना बचत की जा सकती है तथा उसकी क्षमता को अनेकों गुना बढ़ाया जा सकता है।

4.7 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{2} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{3} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{4} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{5} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{6} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{7} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{8} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{9} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{10} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{11} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिकगणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।

{12} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।

{13} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{14} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।

{15} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{16} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp. 17-19.

{17} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{18} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

अध्याय पाँच

संख्याओं की घातें
(Powers of Numbers)

प्रकाशन (Publications)

- संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
- संख्याओं की घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 10-21.
- Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 77-79.
- Vedic Mathematics: Squaring (प्रकाशनार्थ प्रेषित)
- संगणकीय शिक्षा के उभरते क्षितिज (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत्, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, आनुरूप्येण, यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् एवं विलोकनम् आदि।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

5.2 संख्याओं के वर्ग (Square of Numbers)
(क) आनुरूपेण विधि (Anurupyena Method)
(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Base Number)
(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Subbase Number)
(घ) यदि संख्या के सभी अंक सर्वोच्च अंक हों :
(If Each and Every Digit of Number is Highest Digit)
(ड़) यदि संख्या का अंतिम अंक (X/2) हो (If Last Digit of Number is X/2)
(च) यदि संख्या के सभी अंक 1 हों (If Each and Every Digit of Number is One)

5.3 संख्याओं के घन (Cube of Numbers)
(क) आनुरूपेण विधि (Anurupyena Method)
(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Base Number)
(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

5.4 संख्याओं के चतुर्थ घात (Fourth Power of Numbers)
(क) आनुरूपेण विधि (Anurupyena Method)
(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Base Number)
(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

5.5 संख्याओं के पंचम घात (Fifth Power of Numbers)
(क) आनुरूपेण विधि (Anurupyena Method)
(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Base Number)
(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

5.6 विभिन्न घातों पर बीजांकों एवं वैकल्पिक बीजांकों के लिए सारणियाँ
(Tables for Beejank and Alternate Beejank on Different Powers)

5.7 निष्कर्ष (Conclusion)

5.8 संदर्भ ग्रन्थ (References)

5.1 प्रस्तावना (Introduction) :

जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का एक या एक से अधिक बार गुणा किया जाता है, तो उस संख्या की घात संख्यायें प्राप्त होती हैं। इस अध्याय में विभिन्न अंक प्रणालियों (द्विअंकीय, चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय) में वर्ग, घन, चतुर्थघात एवं पंचम घात संख्यायें ज्ञात {1–6} करने की विधियों का वर्णन किया गया है। वर्ग ज्ञात करने की छः विधियों का वर्णन किया गया है। घन, चतुर्थघात एवं पंचमघात ज्ञात करने की तीन–तीन विधियों का वर्णन किया गया है। अन्त में चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणाली में अंकों के विभिन्न घातों पर बीजांकों एवं वैकल्पिक बीजांकों के मान निकाले गये हैं, जिन्हें सारणियों में दिया गया है। यहाँ वैदिक गणित के सूत्रों एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण एवं उपसूत्रों यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत् एवं आनुरूप्येण आदि का उपयोग किया गया है। गणनाओं के लिए चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणाली में अंकों के वर्ग, घन, चतुर्थघात एवं पंचमघात के मान परिशिष्ट (5) में दिये गये हैं।

5.2 संख्याओं के वर्ग (Square of Numbers) :

जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का एक बार गुणा किया जाता है, तो वर्ग संख्या प्राप्त होती है। प्राप्त संख्या वर्गफल {7–10} कहलाती है। वर्ग ज्ञात करने की कुछ विधियों का वर्णन किया गया है, जो निम्नवत् हैं:–

5.2(क) आनुरूपेण विधि (Anurupyena Method) :

'आनुरूप्येण' उपसूत्र का प्रयोग करके किसी भी संख्या का वर्गफल ज्ञात किया जा सकता है। वर्गफल में तीन भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।
(2) दोनों भागों (दायाँ भाग एवं बायाँ भाग) का अनुपात ज्ञात किया जाता है।
(3) वर्गफल में तीन भाग होते हैं।
  (य) बायाँ भाग संख्या के बायें भाग का वर्ग होता है।
  (र) मध्य भाग वर्गफल के बायें भाग एवं अनुपात के गुणनफल का दो गुना होता है। अर्थात मध्य भाग संख्या के बायें भाग एवं दायें भाग के गुणनफल का दो गुना होता हैं
  (ल) दायाँ भाग वर्गफल के बायें भाग एवं अनुपात के वर्ग का गुणनफल होता है। अर्थात संख्या के दायें भाग का वर्ग होता है।
(4) वर्गफल के मध्य भाग एवं दायें भाग में अंकों की संख्या, संख्या के दायें भाग में अंकों की संख्या के तुल्य होती है। अतिरिक्त अंक बायीं ओर जुड़ते हैं।
(5) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट वर्गफल प्राप्त होता है।

उदाहरण (1) (क) $(21)^2_4$ (ख) $(72)^2_8$ (ग) $(AC)^2_{16}$

हलः (क) $(21)^2 = \; 2^2 \mid 2 \text{x} 2 \text{x} 1 \mid 1^2 = 10 \mid 10 \mid 1 = (1101)_4$

$(21)_4$ का बीजांक $=3$, $(3^2)_4$ का बीजांक$=3$

$(1101)_4$ का बीजांक =3

(ख) $(72)^2 = 7^2 \mid 2x7x2 \mid 2^2 = 61 \mid 34 \mid 4 = (6444)_8$

$(72)_8$ का बीजांक= 2, $(2^2)_8$ का बीजांक = 4

$(6444)_8$ का बीजांक= 4

(ग) $(AC)^2 = A^2$ I 2xAxC I C^2 = 64 I F0 I 90 = $(7390)_{16}$

AC का वैकल्पिक बीजांक =2, 2^2 का वैकल्पिक बीजांक = 4

7390 का वैकल्पिक बीजांक = 4

5.2(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Base Number)

जब संख्यायें आधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है इस विधि में 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्' (जितना विचलन हो उतना ही विचलन जोड़ करके विचलन का वर्ग करें) उपसूत्र का प्रयोग किया जाता है। वर्गफल में दो भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या की आधार संख्या ज्ञात की जाती है। (2) संख्या का आधार संख्या से विचलन ज्ञात किया जाता हैं। (3) वर्गफल का बायाँ भाग संख्या एवं विचलन का योगफल होता है। (4) वर्गफल का दायाँ भाग विचलन का वर्ग होता है। वर्गफल के दायें भाग में अंकों की संख्या आधार संख्या में शून्यों की संख्या के तुल्य होती है। अतिरिक्त अंक बायीं ओर स्थानानुसार जोड़े जाते हैं। (5) स्थानानुसार जोड़ने पर वर्गफल प्राप्त होता है।

उदाहरण (2) (क) $(1001)_2^2$ (ख) $(3332)^2_4$ (ग) $(1072)_8^2$ (घ) $(100F)^2_{16}$

(ड़) $(FFFF3)_{16}^2$ (च) $(EEEEEEEEF)_{16}^2$

हल: (क) संख्या = $(1001)_2$, आधार संख्या = 1000, शून्यों की संख्या = 3, विचलन = + 001

$(1001)^2 = (1001+001) \mid (001)^2 = 1010 \mid 001 = (1010001)^2$

(ख) संख्या = $(3332)_4$, आधार संख्या = 10000, शून्यों की संख्या = 4, विचलन = $00\bar{0}\bar{2}$

$(3332)^2 = (3332 + 000\bar{2}) \mid (000\bar{2})^2 = 3330 \mid 0010 = (33300010)_4$

$(3332)_4$ का बीजांक = 2, $(2^2)_4$ का बीजांक = 1, $(33300010)_4$ का बीजांक = 1

(ग) संख्या =$(1072)_8$, आधार संख्या = 1000, शून्यों की संख्या = 3,विचलन = +072

$(1072)^2 = (1072+072) \mid (072)^2 = 1164 \mid 6444 = (1172444)_8$

(घ) संख्या = $(100F)_{16}$, आधार संख्या = 1000, शून्यों की संख्या = 3, विचलन = +00F

$(100F)^2 = (100F+00F) \mid (00F)^2 = (101E) \mid 0E1 = (101E0E1)_{16}$

(ड़) संख्या = $(FFFF3)_{16}$, आधार संख्या = 100000, शून्यों की संख्या = 5, विचलन = $0000\bar{D}$

$(FFFF\ 3)^2 = (FFFF3 + 0000\bar{D}) \mid (0000\bar{D})^2 = (FFFE6000A9)_{16}$

$(FFFF3)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक =3, $(3^2)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक =9

$(FFFE\ 6000A9)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक = 9

(च) संख्या = $(EEEEEEEEF)_{16}$, आधार संख्या = 1000000000, शून्यों की संख्या = 9

विचलन = $\bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}$

$(EEEEEEEEF)^2_{16} = (EEEEEEEEF + \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}) \mid (\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1})^2$

= DDDDDDDDE | 987654321

1 2 3 4 5 6 7 8

$= (DF0123456987654321)_{16}$

$(EEEEEEEEF)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक = F

$(F^2)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक = 4

$(DF0123456987654321)_{16}$ का वैकल्पिक बीजांक = 4

5.2(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

जब कोई संख्या उपाधार संख्या के निकट होती है, तब उस संख्या का वर्गफल ज्ञात करने के लिए इस विधि का उपयोग किया जाता है। इस विधि में 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत' एवं 'आनुरूप्येण' (अनुपात से) उपसूत्रों का प्रयोग किया जाता है। वर्गफल में दो भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या की उपाधार संख्या एवं आधार संख्या ज्ञात की जाती है। (2) उपाधार संख्या एवं आधार संख्या का अनुपात ज्ञात किया जाता है। (3) संख्या का उपाधार संख्या से विचलन ज्ञात किया जाता है। (4) वर्गफल का बायाँ भाग संख्या एवं विचलन के योगफल में अनुपात का गुणा करने से प्राप्त होता है। (5) वर्गफल का दायाँ भाग विचलन का वर्ग होता है, दायें भाग में अंकों की संख्या आधार संख्या में शून्यों की संख्या के तुल्य होती है। अतिरिक्त अंक स्थानानुसार बायीं ओर जुड़ते हैं। (6) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से प्राप्त संख्या अभीष्ट वर्गफल होती है ।

उदाहरण (3) (क) $(203)^2_4$ (ख) $(2331)^2_4$ (ग) $(50013)^2_8$ (घ) $(5772)^2_8$

(ङ) $(2000F)^2_{16}$ (च) $(9FFEF)^2_{16}$ (छ) $(DFFFCE)^2_{16}$ (ज) $(2FFFFFFED)^2_{16}$

हल: (क) संख्या = $(203)_4$, उपाधार संख्या = 200, आधार संख्या = 100

अनुपात = 2, शून्यों की संख्या = 2, विचलन = +03

$(203)^2 = 2\ (203+03) \mid (03)^2$

$= (103021)_4$

$(203)_4$ का बीजांक = 2, 2^2 का बीजांक = 1

(ख) संख्या = (2331), उपाधार संख्या = 3000, आधार संख्या = 1000

अनुपात = 3, शून्यों की संख्या = 3, विचलन = $00\bar{3}$

$(2331)_4^2 = (2331+00\bar{3}) \mid (00\bar{3})^2$

$=(20232021)_4$

$(2331)_4$ का वैकल्पिक बीजांक = 1, $(1^2)_4$ का वैकल्पिक बीजांक = 1

$(20232021)_4$ का वैकल्पिक बीजांक = 1

(ग) संख्या = $(50013)_8$, उपाधार संख्या = 50000, आधार संख्या = 10000,

अनुपात = 5, शून्यों की संख्या = 4, विचलन = +0013

$(50013)^2 = 5\ (50013 + 0013) \mid (0013)^2$

$= 5\ (50026) \mid (0171) = (3101560171)_8$

(घ) संख्या = $(5772)_8$, उपाधार संख्या = 6000, आधार संख्या = 1000

अनुपात = 6, शून्यों की संख्या = 3, विचलन = $00\bar{6}$

$(5772)^2 = 6\ (5772 + 00\bar{6}) \mid (00\bar{6})^2 = 6\ (5764) \mid (044)$

$= (43670044)_8$

(ड़) संख्या = $(2000F)_{16}$, उपाधार संख्या = 20000,

आधार संख्या = 10000,

अनुपात = 2, शून्यों की संख्या = 4, विचलन = +000F

$(2000F)^2_{16}$ = 2 (2000F + 000F) | $(00F)^2$

= 2 (2001E) |(00E1)

= $(4003C00E1)_{16}$

$(2000F)_{16}$ का बीजांक = 2, $(2^2)_{16}$ का बीजांक = 4

$(4003C00E1)_{16}$ का बीजांक = 4

(च) संख्या = $(9FFEF)_{16}$, उपाधार संख्या = A0000,

आधार संख्या = 10000, अनुपात = A, शून्यों की संख्या =4, विचलन = $00\bar{1}\,\bar{1}$

$(9FFEF)^2$ = A(9FFEF+$00\bar{1}\,\bar{1}$)| $(00\bar{1}\,\bar{1})^2$ = A (9FFDE) | (0121)

= $(63FEAC0121)_{16}$

(छ) संख्या = $(DFFFCE)_{16}$, उपाधार संख्या = E00000,

आधार संख्या = 100000, अनुपात = E, शून्यों की संख्या = 5,

विचलन = $000\bar{3}\,\bar{2}$

$(DFFFCE)^2$ = E(DFFFCE + $000\bar{3}\,\bar{2}$) | $(000\bar{3}\,\bar{2})^2$

= E (DFFF9C) | (009C4)

= $(C3\ FFA\ 88009C4)_{16}$

(ज) संख्या = $(2FFFFFFED)_{16}$, उपाधार संख्या = 300000000

आधार संख्या = 100000000, अनुपात = 3, शून्यों की संख्या = 8

विचलन = $000000\bar{1}\,\bar{3}$

$(2FFFFFFED)^2_{16}$=3(2FFFFFFED+$000000\bar{1}\,\bar{3}$) | $(000000\bar{1}\,\bar{3})^2$

= 3 (2FFFFFFDA) | (000000169)

= $(8FFFFFF8\ E\ 00000169)_{16}$

5.2(घ) यदि संख्या के सभी अंक सर्वोच्च अंक हों :
(If Each and Every Digit of Number is Highest Digit)

संख्या के सभी अंक सर्वोच्च अंक होने पर वर्ग ज्ञात करने के लिए क्रियापद निम्नवत् हैं:-

(1) वर्गफल को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।

(2) बायाँ भाग= संख्या –1 (3) दायाँ भाग = संख्या – बायाँ भाग

(4) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (4) (च) $(111111)_2$ (छ) $(111111111)_2$ (ज) $(33333)_4$

(झ) $(333333333)_4$ (ञ) $(7777)_8$ (ट) $(7777777777)_8$

(ठ) $(FFFFFFFF)_{16}$ (ड) $(FFFFFFFFFFFFFF)_{16}$

हल : (च) $(111111)^2$ = (111111-1)| (111111-111110)= $(111110\ 000001)_2$

(छ) $(111111111)^2_2$ = $(11111111\ 0000000001)_2$

(ज) $(33333)^2_4$ = $(3333200001)_4$

(झ) $(333333333)^2_4$ = $(333333332\ 000000001)_4$

(ञ) $(7777)_8$ = $(77760001)_8$

(ट) $(77777777777)^2_8$ = $(77777777776\ 00000000001)_8$

(ठ) $(FFFFFFFF)^2{}_{16} = (FFFFFFFE00000001)_{16}$
(ड़) $(FFFFFFFFFFFFFFFF)^2{}_{16} = (FFFFFFFFFFFFFFFE0000000000000)^2{}_{16}$

5.2(ड़) यदि संख्या का अंतिम अंक (X/2) हो (If Last Digit of Number is X/2) :

संख्या का अंतिम अंक सर्वोच्च अंक (X/2) होने पर वर्ग ज्ञात करने के लिए क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) वर्गफल को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।
(2) बायाँ भाग= (अंक या अंकों का समूह X/2 को छोड़कर)×(अंक या अंकों का समूह X/2 को छोड़कर +1) (3) दायाँ भाग = $(X/2)^2$, दाहिनी ओर 2 अंक लिखने पर
(4) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (5) (च) $(101)^2{}_2$ (छ) $(32)^2{}_4$ (ज) $(2332)^2{}_4$ (झ) $(64)^2{}_8$
(ञ) $(5774)^2{}_8$ (ट) $(28)^2{}_{16}$ (ठ) $(A8)^2{}_{16}$ (ड) $(F8)^2{}_{16}$ (ढ) $(3FF8)^2{}_{16}$

हल : (च) $(101)^2 = 10\ (10+1)\ I\ 1^2 = (11001)_2$
(छ) $(32)^2 = 3\ (3+1)\ I\ 2^2 = (3010)_4$
(ज) $(2332)^2 = 233(233+1)\ I\ 2^2 = (20310010)_4$
(झ) $(64)^2 = 6(6+1)\ I4^2 = (5220)_8$
(ञ) $(5774)^2 = 577\ (577+1)\ I4^2 = (43720020)_8$
(ट) $(28)^2 = 2\ (2+1)\ I\ 8^2 = (540)_{16}$
(ठ) $(A8)^2 = A\ (A+1)\ I\ 8^2 = (6E40)_{16}$
(ड) $(F8)^2 = F\ (F+1)\ I\ 8^2 = (F040)_{16}$
(ढ) $(3FF8)^2 = 3FF\ (3FF+1)\ I\ 8^2 = (FFC0040)_{16}$

5.2(च) यदि संख्या के सभी अंक 1 हों (If Each and Every Digit of Number is One) :

संख्या के सभी अंक 1 होने पर वर्ग ज्ञात करने के लिए क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या में अंकों की संख्या ज्ञात करते हैं, माना यह P है।
(2) वर्गफल को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।
(2) बायाँ भाग= आरोही क्रम में अंक 1 से P तक लिखते हैं। (3) दायाँ भाग = अवरोही क्रम में अंक (P-1) से 1 तक लिखते हैं। (4) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट वर्ग संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (6) (च) $(111111111111111)^2{}_{16}$ (छ) $(1111111)^2{}_8$ (ज) $(111)^2{}_4$
(झ) $(1111111111)^2{}_8$ (ञ) $(1111111111)^2{}_{16}$

हल : (च) $(111111111111111)^2 =$ 123456789 ABCDEF I EDCBA 987654321
$= (123456789\ ABCDEFEDCBA\ 987654321)_{16}$
(छ) $(1111111)^2 = (1234567654321)_8$
(ज) $(111)^2 = (12321)_4$
(झ) $(1111111111)^2 =$ 123456701 2 107654321
11 11 1
$= (1234570123207654321)_8$
(ञ) $(1111111111)^2 = (123456789A987654321)_{16}$

5.3 संख्याओं के घन (Cube of Numbers) :

जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का दो बार गुणा किया जाता है अथवा किसी संख्या के वर्ग में स्वयं संख्या का गुणा किया जाता है, तो घन संख्या प्राप्त होती है। प्राप्त संख्या घनफल {11–14} कहलाती है। घन ज्ञात करने की कुछ विधियों का उल्लेख यहाँ पर किया गया है, जो कि निम्नवत् हैं:–

5.3(क) आनुरूप्येण विधि (Anurupyena Method) :

'आनुरूप्येण' उपसूत्र का प्रयोग करके किसी भी संख्या का घनफल ज्ञात किया जा सकता है। घनफल में चार भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् है।

(1) संख्या को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।
(2) दायें भाग एवं बायें भाग का अनुपात ज्ञात किया जाता है।
(3) घनफल में चार भाग होते हैं।
  (य) बायाँ भाग संख्या के बायें भाग का घन होता है।
  (र) परिबायाँ भाग (बायें भाग के दायीं ओर) घनफल के बायें भाग एवं अनुपात के गुणनफल का तीन गुना होता है अर्थात संख्या के बायें भाग के वर्ग एवं दायें भाग के गुणनफल का तीन गुना होता है।
  (ल) पूर्व दायाँ भाग (दायें भाग के बायीं ओर) घनफल के बायें भाग एवं अनुपात के वर्ग के गुणनफल के तीन गुने के तुल्य होता है अर्थात संख्या के बायें भाग एवं दायें भाग के वर्ग के गुणनफल के तीन गुने के तुल्य होता है।
  (ब) दायाँ भाग घनफल के बायें भाग एवं अनुपात के घन के गुणनफल के तुल्य होता है अर्थात संख्या के दायें भाग के घन के तुल्य होता है।
(4) घनफल के बायें भाग को छोड़कर शेष सभी भागों में अंकों की संख्या संख्या के दायें भाग में अंकों की संख्या के तुल्य होती है। अतिरिक्त अंक बायीं ओर जुड़ते हैं।
(5) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट घनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण (1) (च) $(13)_4{}^3$ (छ) $(34)_8{}^3$ (ज) $(B10)_{16}{}^3$

हलः (च) $X = 4$, संख्या $= 13$

$$13^3 = 1^3 \mid 3\times1^2\times3 \mid 3\times1\times3^2 \mid 3^3$$

$$\begin{array}{rr|r|r|l} = & 1 & 1 & 3 & 3 \\ & & 1 & 2 & \\ & 1 & 2 & & \\ & 2 & & & \end{array}$$

$$= 11113$$

(छ) $X = 8$, संख्या $= 34$

$$34^3 = 3^3 \mid 3\times3^2\times4 \mid 3\times3\times4^2 \mid 4^3$$

$$\begin{array}{rr|r|r|l} = & 33 & 4 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & \\ & 2 & 2 & & \\ & 15 & & & \end{array}$$

$$= 52700$$

(ज) $X = 16$, संख्या = B 10

$B10^3 = B^3 \mid 3\times B^2 \times 10 \mid 3\times B \times 10^2 \mid 10^3$

$=533 \mid 3 \times 79 \times 10 \mid 2100 \mid 1000$

$=533 \mid B0 \mid 00 \mid 00$

$\quad 16 \mid 21 \mid 10 \mid$

$= 549D11000$

5.3(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि :

(Deviation Method from Equal Base Number)

जब संख्यायें आधार संख्या के निकट होती हैं, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है। इसमें 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्' उपसूत्र का प्रयोग किया जाता है। घनफल में तीन भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या की आधार संख्या का निर्धारण किया जाता है।

(2) बायाँ भाग = आधार संख्या +3 × विचलन

(3) मध्य भाग = 3 $(\text{विचलन})^2$ (4) दायाँ भाग = $(\text{विचलन})^3$

उदाहरण (2) (च) $(1002)_4^3$ (छ) $(1001)_2^3$ (ज) $(100A)^3$

हल : (च) $X = 4$, संख्या = 1002

आधार संख्या = 1000, विचलन = 002

$(1002)^3 = 1000 + 3 \times 002 \mid 3\,(002)^2 \mid (002)^3$

$= 1012 \mid 030 \mid 020$

$= 1012030020$

(छ) $X = 2$, संख्या = 1001,

आधार संख्या = 1000, विचलन = 001

$(1001)^3 = 1000+3\times 001 \mid 3\,(001)^2 \mid (001)^3$

$= 1011 \mid 011 \mid 011$

$= 1011\ 011\ 001$

(ज) $X = 16$, आधार संख्या = 1000

$(100A)^3 = 1000 + 3\times 00A \mid 3\,(00A)^2 \mid (00A)^3$

$= 101E \mid 3\,(64) \mid 3E8$

$= 101E \mid 12C \mid 3E8$

$= 101E12C3E8$

5.3(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि :

(Deviation Method from Equal Subbase Number)

जब संख्यायें उपाधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है। इसमें 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्' एवं 'आनुरूप्येण' उपसूत्रों का प्रयोग किया जाता है। घनफल में तीन भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या की उपाधार संख्या एवं आधार संख्या ज्ञात की जाती है।

(2) उपाधार संख्या एवं आधार संख्या का अनुपात ज्ञात किया जाता है।

(3) बायाँ भाग = $(अनुपात)^2$ {उपाधार संख्या + 3 × विचलन}

(4) मध्य भाग = 3 (अनुपात) $(विचलन)^2$ (5) दायाँ भाग = $(विचलन)^3$

उदाहरण (3) (च) $(2001)_4{}^3$ (छ) $(20004)_8{}^3$ (ज) $(200A)_{16}{}^3$

हल: (च) X = 4, संख्या = 2001, आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 2000, अनुपात =2

$(2001)^3 = 2^2(2000+ 3\times001) \mid 3\ (2)\ (001)^2 \mid (001)^3$

= 10 (2003) | 012 | 001

= 20030012001

(छ) X = 8, संख्या = 20004

आधार संख्या = 10000, उपाधार संख्या = 20000, अनुपात =2

$(20004)^3 = (2)^2\ (20000+3\times0004) \mid 3\ (2)\ (0004)^2 \mid (0004)^3$

= 4 (20014) | 0140| 0100

=10006001400100

(ज) X = 16, आधार संख्या =1000, उपाधार संख्या =2000, अनुपात = 2

$(200A)^3 = (2)^2\ \{2000 + 3 \times 00A\} \mid 3(2)\ (00A)^2 \mid (00A)^3$

= 4 (201 E) | 6 (64) | 3E8

= 8078 | 258 | 3E8

= 80782583E8

5.4 संख्याओं के चतुर्थ घात (Fourth Power of Numbers) :

जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का तीन बार गुणा किया जाता है या संख्या के वर्ग का वर्ग ज्ञात किया जाता है, तो चतुर्थघात संख्या प्राप्त होती है, प्राप्त संख्या चतुर्थघातफल {15–18} कहलाती है। चतुर्थधात ज्ञात करने की कुछ विधियों का वर्णन यहाँ पर किया गया है जो कि निम्नवत् हैं:–

5.4(क) आनुरूप्येण विधि (Anurupyena Method) :

'आनुरूप्येण' उपसूत्र का प्रयोग करते हुए किसी भी संख्या की चतुर्थघात संख्या ज्ञात की जा सकती है। चतुर्थघात संख्या में पाँच भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।

(2) दायें भाग एवं बायें भाग का अनुपात ज्ञात किया जाता है।

(3) चतुर्थघात संख्या में पाँच भाग होते हैं।

(य) बायाँ भाग संख्या के बायें भाग की चतुर्थघात संख्या होती है।

(र) परिबायाँ भाग (पूर्व मध्य भाग) चतुर्थघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के गुणनफल के चार गुने के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के बायें भाग के घन एवं दायें भाग के गुणनफल के चार गुने के तुल्य होता हैं

(ल) मध्य भाग चतुर्थघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के वर्ग के गुणनफल के छः गुने के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के बायें भाग के वर्ग एवं दायें भाग के वर्ग के गुणनफल के छः गुने के तुल्य होता है।

(व) पूर्व दायाँ भाग चतुर्थघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के घन के गुणनफल के चार गुने के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के बायें भाग एवं दायें भाग के घन के गुणनफल के चार गुने के तुल्य होता है।

(श) दायाँ भाग चतुर्थघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात की चतुर्थघात के गुणनफल के तुल्य होता है अर्थात संख्या की दायें भाग की चतुर्थघात संख्या के तुल्य होता है।

(4) चतुर्थघात संख्या के बायें भाग को छोड़कर शेष भागों में अंकों की संख्या संख्या के दायें भाग में अंकों की संख्या के तुल्य होती है, अतिरिक्त अंक बायीं ओर पड़ते हैं।

(5) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट चतुर्थघात संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (1) (च) $(22)_4^4$ (छ) $(207)^4_8$ (ज) $(50A)_{16}^4$

हलः (च) X = 4, संख्या = 22

$22^4 = 2^4 \mid 4\times2^3\times2 \mid 6\times2^2\times2^2 \mid 4\times2\times2^3 \mid 2^4$

$= 2^4 \mid 10\times2^4 \mid 12\times2^4 \mid 10\times2^4 \mid 2^4$

```
= 100 |0 | 0 | 0|0
      |  | 1 | 0|
    1 |0 | 0 |  |
   12 |0 |   |  |
  100 |  |   |  |
```

= 2130100

(छ) X = 8, संख्या = 207

$207^2 = 2^4 \mid 4\times2^3\times(07) \mid 6\times2^2\times(07)^2 \mid 4\times2\times(07)^3 \mid (07)^4$

```
= 20 |40|30 |70 |41
   3 |22| 52 |45 |
```

= 2363033541

(ज) X = 16, संख्या = 50A

$50A^4 = 5^4 \mid 4\times5^3\times(0A) \mid 6\times5^2\times(0A)^2 \mid 4\times5\times(0A)^3 \mid (0A)^4$

```
=271 | 88 |98 |20 |10
  13 | 3A |4E |27 |
```

= 284C2E64710

5.4(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि :

(Deviation Method from Equal Base Number)

जब संख्यायें आधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है। इसमें 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्' उपसूत्र का प्रयोग किया जाता है, चतुर्थघात संख्या में चार भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैः–

(1) बायाँ भाग = आधार संख्या + 4 × विचलन (2) परिबायाँ भाग = 6 $(\text{विचलन})^2$

(3) पूर्व दायाँ भाग = 4 $(\text{विचलन})^3$ (4) दायाँ भाग=$(\text{विचलन})^4$

उदाहरण (2) (च) $(102)_4^4$ (छ) $(1005)_8^4$ (ज) $(1003)_{16}^4$

हलः (च) X = 4, संख्या = 102, आधार संख्या = 100

$(102)^4 = 100+10\times02 \mid 12\times(02)^2 \mid 10\,(02)^3 \mid (02)^4$

```
=120 | 0 |00|00
   1   2  1
```

$=121220100$

(छ) X= 8, संख्या = 1005, आधार संख्या = 1000

$(1005)^4 = 1000 + 4 \times 005 \mid 6\,(005)^2 \mid 4\,(005)^3 \mid (005)^4$

$= 1024 \mid 226 \mid 764 \mid 161$

1

$= 1024226765161$

(ज) X = 16, संख्या =1003, आधार संख्या = 1000

$(1003)^4 = 1000 + 4 \times 003 \mid 6\,(003)^2 \mid 4\,(003)^3 \mid (003)^4$

$= 100\,C \mid 036 \mid 06C \mid 051$

$= 100C\,03606C051$

5.4(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

जब संख्यायें उपाधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है। इसमें 'यावूदनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्' एवं 'आनुरूप्येण' उपसूत्र का उपयोग किया जाता है। चतुर्थघात संख्या में चार भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^3$ {उपाधार संख्या + 4 × विचलन}

(2) परिबायाँ भाग = 6 $(\text{अनुपात})^2$ $(\text{विचलन})^2$

(3) पूर्व दायाँ भाग = 4 (अनुपात) $(\text{विचलन})^3$ (4) दायाँ भाग = $(\text{विचलन})^4$

उदाहरण (3) (च) $(2001)_4{}^4$ (छ) $(1777)_8{}^4$ (ज) $(2001)_{16}{}^4$

हलः (च) X = 4, संख्या = 2001

आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 2000, अनुपात = 2

$2001^4 = 2^3\,\{2000+10\times001\} \mid 12\,(2)^2\,(001)^2 \mid 10\,(2)\,(001)^3 \mid (001)^4$

$= 20\,(2010) \mid 120 \mid 020 \mid 001$

$= 100200120020001$

(छ) X = 8, संख्या = 1777

आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 2000, अनुपात = 2

$1777^4 = 2^3\,\{2000+4\times00\bar{1}\} \mid 6\,(2)^2\,(00\bar{1})^2 \mid 4\,(2)\,(00\bar{1})^3 \mid (00\bar{1})^4$

$=200\bar{4}0 \mid 030 \mid 0\bar{1}0 \mid 001$

$=200\bar{4}00300\bar{1}0001$

$=17740027770001$

(ज) X= 16, आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 2000, अनुपात = 2

$(2001)^4 = (2)^3\,\{2000 + 4 \times 001\} \mid 6(2)^2\,(001)^2 \mid 4\,(2)\,(001)^3 \mid (001)^4$

$= 8\,(2004) \mid 018 \mid 008 \mid 001$

$= 10020018008001$

5.5 संख्याओं के पंचम घात (Fifth Power of Numbers) :

जब किसी संख्या में स्वयं संख्या का चार बार गुणा किया जाता है या किसी संख्या के वर्ग में घन का गुणा किया जाता है या संख्या की चतुर्थघात संख्या में स्वयं संख्या का गुणा किया जाता हैं तो पंचम घात संख्या प्राप्त होती है। प्राप्त संख्या पंचमघातफल {19–20} कहलाती है। पंचम घात ज्ञात करने की कुछ विधियों का उल्लेख किया गया है, जो कि निम्नवत् हैं:–

5.5(क) आनुरूप्येण विधि (Anurupyena Method) :

'आनुरूप्येण' उपसूत्र का प्रयोग करते हुए किसी भी संख्या की पंचमघात संख्या ज्ञात की जा सकती है। पंचम घात संख्या में छः भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) संख्या को दो भागों (बायाँ भाग एवं दायाँ भाग) में विभाजित किया जाता है।
(2) दायें भाग एवं बायें भाग का अनुपात ज्ञात किया जाता है।
(3) पंचम घात संख्या में छः भाग होते हैं।
 (य) बायाँ भाग संख्या के बायें भाग की पंचम घात संख्या होती है।
 (र) परिबायाँ भाग पंचम घात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के गुणनफल के पाँच गुने के तुल्य होता है अर्थात संख्या के बायें भाग की चतुर्थघात संख्या एवं दायें भाग के गुणनफल के पाँच गुने के तुल्य होता है।
 (ल) परिपरिबायाँ भाग पंचम घात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के गुणनफल के दस गुने के तुल्य होता है अर्थात संख्या के बायें भाग के घन एवं दायें भाग के वर्ग के गुणनफल के दस गुने के तुल्य होता है।
 (व) पूर्वपूर्वदायाँ भाग पंचमघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात के घन के गुणनफल के दस गुने के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के बायें भाग के वर्ग एवं दायें भाग के घन के गुणनफल के दस गुने के तुल्य होता है।
 (श) पूर्वदायाँ भाग पंचमघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात की चतुर्थघात संख्या के गुणनफल के पाँच गुने के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के बायें भाग एवं दायें भाग की चतुर्थघात संख्या के गुणनफल के पांच गुने के तुल्य होता है।
 (ष) दायाँ भाग पंचमघात संख्या के बायें भाग एवं अनुपात की पंचमघात संख्या के गुणनफल के तुल्य होता है। अर्थात संख्या के दायें भाग की पंचमघात संख्या के तुल्य होता है।
(4) पंचमघात संख्या के बायें भाग के अंक को छोड़कर शेष भागों में अंकों की संख्या संख्या के दायें भाग में अंकों की संख्या के तुल्य होती हैं, अतिरिक्त अंक बायीं ओर स्थानानुसार जोड़े जाते हैं। (5) स्थानानुसार रखकर जोड़ने से अभीष्ट पंचमघात संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (1) (च) $(23)_4^5$ (छ) $(102)_8^5$ (ज) $(10A)_{16}^5$

हलः (च) X = 4, संख्या = 23

$23^5 = 2^5 \mid 11\times2^4\times3 \mid 22\times2^3\times3^2 \mid 22\times2^2\times3^3 \mid 11\times2\times3^4 \mid 3^5$

= 200	0	0	0	2	3
		3	3	0	
3	0	2	2		
100	3	2			
231	0				
330					

= 213110123

(छ) $X = 8$, संख्या = 102

$$102^5 = 1^5 \mid 5\times1^4\times(02) \mid 12\times1^3\times(02)^2 \mid 12\times1^2\times(02)^3 \mid 5\times1\times(02)^4 \mid (02)^5$$

$$= 1 \mid 12 \mid 50 \mid 20 \mid 20 \mid 40$$

$$\quad\quad\quad\quad 1 \quad 1$$

$$= 11251212040$$

(ज) $X = 16$, संख्या = 10A

$$10A^5 = 1^5 \mid 5\times1^4\times(0A) \mid 10\times1^3\times(0A)^2 \mid 10\times1^2\times(0A)^3 \mid 5\times1\times(0A)^4 \mid (0A)^5$$

=1	32	40	80	50	A0
			1	86	
	6	3E	C3		

$$=1387F44D6A0$$

5.5(ख) समान आधार संख्या से विचलन विधि :

(Deviation Method from Equal Base Number)

जब संख्यायें आधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इसमें 'यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्' उपसूत्र का प्रयोग किया जाता हैं पंचमघात संख्या में पाँच भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

(1) बायाँ भाग = आधार संख्या + 5 × विचलन

(2) परिबायाँ भाग = 10 $(\text{विचलन})^2$ (3) मध्य भाग = 10 $(\text{विचलन})^3$

(4) पूर्व दायाँ भाग = 5 $(\text{विचलन})^4$ (5) दायाँ भाग = $(\text{विचलन})^5$

उदाहरण (2) (च) $(102)_4{}^5$ (छ) $(102)_8{}^5$ (ज) $(1002)_{16}{}^5$

हल: (च) $X = 4$, संख्या = 102

आधार संख्या = 100, विचलन = 02

$$(102)^5 = 100 + 5\times02 \mid 22\times(02)^2 \mid 22\times(02)^3 \mid 11\times(02)^4 \mid (02)^5$$

$$= 122 \mid 20 \mid 00 \mid 00 \mid 00$$

$$\quad 2 \quad 11 \quad 11 \quad 2$$

$$= 13031110200$$

(छ) $X = 8$, संख्या = 102

आधार संख्या = 100, विचलन = 02

$$(102)^5 = 100+5\times02 \mid 12\times(02)^2 \mid 12\times(02)^3 \mid 5\times(02)^4 \mid (02)^5$$

$$= 122 \mid 50 \mid 20 \mid 20 \mid 40$$

$$\quad 1 \quad 1$$

$$= 11251212040$$

(ज) $X = 16$, आधार संख्या =1000

$$(1002)^5 = 1000 + 5 \times 002 \mid A(002)^2 \mid A(002)^3 \mid 5(002)^4 \mid (002)^5$$

$$= 100A \mid 028 \mid 050 \mid 050 \mid 020$$

$$= 100A028050050020$$

5.5(ग) समान उपाधार संख्या से विचलन विधि :
(Deviation Method from Equal Subbase Number)

जब संख्यायें उपाधार संख्या के निकट होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता हैं इसमें 'यावूदनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्' एवं 'आनुरूप्येण' उपसूत्रों का उपयोग किया जाता है। पंचमघात संख्या में पाँच भाग होते हैं। क्रियापद निम्नवत् हैः–

(1) बायाँ भाग = $(\text{अनुपात})^4$ {उपाधार संख्या + 5× विचलन}
(2) परिबायाँ भाग= 10 $(\text{अनुपात})^3$ $(\text{विचलन})^2$ (3) मध्य भाग = 10 $(\text{अनुपात})^2$ $(\text{विचलन})^3$
(4) पूर्व दायाँ भाग= 5 (अनुपात) $(\text{विचलन})^4$ (5) दायाँ भाग = $(\text{विचलन})^5$

उदाहरण (3) (च) ${(203)_4}^5$ (छ) ${(2001)_8}^5$ (ज) ${(2003)_{16}}^5$

हलः (च) X = 4, संख्या = 203

उपाधार संख्या = 200, आधार संख्या = 100, अनुपात = 2

$(203)^5 = 2^4 \{200 + 5 \times 03\} \mid 22\ (2)^3\ (03)^2 \mid 22\ (2)^2 (03)^3 \mid 11\ (2)\ (03)^4 \mid (03)^5$

= 23300	00	20	22	03
	3	02	33	
10	03			
231				

= 3020112232103

(छ) X = 8, संख्या = 2001

उपाधार संख्या = 2000, आधार संख्या = 1000, अनुपात = 2

$2001^5 = 2^4 \{2000+5\times001\} \mid 12\ (2)^3\ (001)^2 \mid 12(2)^2 (001)^3 \mid 5(2)(001)^4 \mid (001)^5$

= 20 (2005) | 120 | 050 | 012 | 001

= 40120120050012001

(ज) X = 16, आधार संख्या = 1000, उपाधार संख्या = 2000, अनुपात = 2

$(2003)^5 = (2)^4\{2000+5x003\} \mid A(2)^3 (003)^2 \mid A\ (2)^2\ (003)^3 \mid 5(2)(003)^4 \mid (003)^5$

= 10 (200F) | 50 (009) | 28 (1B) | A(51) | 0F3

= 200F02D043832A0F3

5.6 विभिन्न घातों पर बीजांकों एवं वैकल्पिक बीजांकों के लिए सारणियाँ :
(Tables for Beejank and Alternate Beejank on Different Powers)

सारणी 1, X=4,

(i) वर्ग **(ii)** घन

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0	अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	0	2	2
3	1	3	1	3	3	3	3

सारणी 2, X=8,

(i) वर्ग

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	4	4	4
3	1	2	0
4	0	2	7
5	1	4	7
6	4	1	0
7	1	7	4

(ii) घन

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	0	1	1
3	3	6	0
4	0	1	1
5	5	6	1
6	0	6	0
7	7	7	1

(iii) चतुर्थ घात

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	4	0
4	00	4	4
5	1	2	5
6	0	1	0
7	1	7	7

(iv) पंचम घात

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	0	4	4
3	3	5	0
4	000	2	7
5	5	3	7
6	0	6	0
7	7	7	4

(v) षष्टम घात

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	00	1	1
3	1	1	0
4	0000	1	1
5	1	1	1
6	00	1	0
7	1	7	1

(vi) सत्तम घात

अंक	इ0अंक	बीजांक	वै0बी0
1	1	1	1
2	00	2	2
3	3	3	0
4	0000	4	4
5	5	5	5
6	00	6	0
7	7	7	7

सरणी 3, X=16,

(i)वर्ग

अंक	इकाई अंक	बीजांक	वै0 बीजांक
1	1	1	1
2	4	4	4
3	9	9	9
4	0	1	1
5	9	A	8
6	4	6	2
7	1	4	F
8	0	4	D
9	1	6	C
A	4	A	F
B	9	1	2
C	0	9	8
D	9	4	1
E	4	1	8
F	1	F	4

(ii) घन

अंक	इकाई अंक	बीजांक	वै0 बीजांक
1	1	1	1
2	8	8	8
3	B	C	A
4	0	4	4
5	D	5	6
6	8	6	C
7	7	D	3
8	00	2	2
9	9	9	6
A	8	A	E
B	3	B	5
C	0	3	B
D	5	7	D
E	8	E	A
F	F	F	9

(iii) चतुर्थ घात

अंक	इकाई अंक	बीजांक	वै0 बीजांक
1	1	1	1
2	0	1	1
3	1	6	D
4	00	1	1
5	1	A	D
6	0	6	4
7	1	1	4
8	000	1	1
9	1	6	3
A	0	A	4
B	1	1	4
C	00	6	D
D	1	1	1
E	0	1	4
F	1	F	1

(iv) पंचम घात

अंक	इकाई अंक	बीजांक	वै० बीजांक
1	1	1	1
2	0	2	2
3	3	3	1
4	00	4	4
5	5	5	E
6	0	6	7
7	7	7	B
8	000	8	8
9	9	9	A
A	0	A	6
B	B	B	A
C	00	C	3
D	D	D	D
E	O	E	5
F	F	F	F

5.7 निष्कर्ष (Conclusion) :

पूर्वाक्त विवेचना से स्पष्ट है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के प्रयोग से घात संक्रियाएं अत्यन्त सरल हो जातीं हैं। सारणी 1(ii) से स्पष्ट है, कि चतुष्अंकीय प्रणाली में अंकों के घन पर बीजांकों की पुनरावृत्ति, सारणी 2(vi) से स्पष्ट है, अष्टअंकीय प्रणाली में अंकों के सप्तम घात पर बीजांकों की पुनरावृत्ति एवं सारणी 3(iv) स्पष्ट है, षोडश अंकीय प्रणाली में अंकों के पंचम घात पर बीजांकों की पुनरावृत्ति होती है। वैदिक गणित के सूत्रों से गणनाओं की जटिलता घट जाती है एवं कियापदों की संख्या भी अत्यल्प हो जाती है। स्पष्ट है कि गणनाओं की गति एवं परिणाम की शुद्धता में आशातीत वृद्धि होती है। यह सूत्र गणनाओं के लिये सहज एवं सशक्त विकल्प प्रस्तुत करते हैं।

5.8 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{2} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{3} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{4} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{5} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{6} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{7} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{8} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{9} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{10} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{11} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Vol. 8, No.3, Cochin, March 2005, pp. 17-19.

{12} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।

{13} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।

{14} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।

{15} L. P. Vishwakarma, Origin of Trigonometric fuction, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 75-76.

{16} अमित कुमार शर्मा एवं कैलाश, पूर्णघात संख्याओं के मूल, Proceedings, Bhaskariyam-Bharatimam-Dhanvatariyam, Dec. 2006, Bangalore, pp.58-64.

{17} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{18} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{19} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{20} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

अध्याय छः

भाग
(Division)

प्रकाशन (Publication)

- वैदिक गणित : भाग संक्रिया (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, परावर्त्य योजयेत्, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं विलोकनम् आदि।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

6.2 विचलन विधि (Deviation Method)

6.3 उर्ध्वतिर्यक एवं ध्वजांक विधि

(Vertically and Crosswise and Flag Digit Method)

6.4 निष्कर्ष (Conclusion)

6.5 संदर्भ ग्रन्थ (References)

6.1 प्रस्तावना (Introduction) :

जब किसी सख्या से किसी संख्या को क्रमशः कई बार घटाया जाता है तो क्रमशः घटाने की संक्रिया को भाग संकिया कहते हैं। जिस संख्या से घटाया जाता है उसे भाज्य के नाम से पुकारा जाता है, और जिसे घटाया जाता है उसे भाजक कहते हैं। किसी संख्या से किसी संख्या को जितनी बार घटाया जाता है, वह भाग संक्रिया का भागफल कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को अधिकतम बार घटाने से जो संख्या बचती है, वह शेषफल कहलाती है, शेषफल सदैव भाजक से छोटा होता है। घटाने से स्पष्ट है कि भाग संकिया 'एकन्यूनेन पूर्वेण' सूत्र से नियंत्रित है। प्रस्तुत अध्याय में भाग की दो विधियों का वर्णन संगणक की विभिन्न अंक प्रणालियों में किया गया है। भाजक आधार संख्या के निकट होता है, तो विचलन विधि एवं किसी भी प्रकार की भाग संकिया के लिए उर्ध्वतिर्यक् एवं ध्वजांक विधि का उपयोग किया जाता है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों निखिलं नवतः चरमं दशतः, परावर्त्य योजयेत्, एकाधिकेन पूर्वेण, एक न्यूनेन पूर्वेण, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं विलोकनम् का उपयोग {1–6} करते हुये भाग को सोदाहरण समझाया गया है।

6.2 विचलन विधि (Deviation Method) :

यदि भाजक आधार संख्या के निकट होता है, तो भागफल एवं शेषफल निम्नवत् {7–10} ज्ञात किया जाता हैः–

कियाविधि (Procedure) : (1) भाजक एवं भाज्य का निर्धारण किया जाता है एवं यथा स्थान लिखा जाता है। (2) भाजक की आधार संख्या ज्ञात करके विचलन ज्ञात किया जाता है। (3) विचलन को विपरीत चिन्हांकित करके संशोधन गुणक ज्ञात किया जाता है। (4) भाजक की आधार संख्या में शून्यों की संख्या तुल्य भाज्य के अंकों के पश्चात विभाजन रेखा खीची जाती है। विभाजन रेखा के बायी ओर अनुमानित भागफल एवं रेखा के दायीं ओर अनुमानित शेषफल होता है। (5) भाज्य का प्रथम अंक भागफल का प्रथम अंक होता है। (6) भागफल के प्रथम अंक का संशोधन गुणक से गुणा करके गुणनफल को भाज्य के प्रथम अंक के पश्चात लिखा जाता है। (7) भागफल का द्वितीय अंक भाज्य के द्वितीय अंक एवं संशोधन गुणक से प्राप्त गुणन के प्रथम अंक का योगफल (भाज्य के अंक के नीचे लिखे समस्त अंकों का योगफल) होता है। (8) पद (6) एवं (7) की पुनरावृत्ति से अभीष्ट भागफल एवं शेषफल प्राप्त होता है। विभाजन रेखा के दायीं ओर के अंकों को जोड़ने से शेषफल प्राप्त होता है।

उदाहरण (1) (च) X=4, 2132211 ÷ 1011 (छ) X=4, 132113311 ÷ 3331
(ज) X=16, A1CD06513BD ÷ 1011 (झ) X=16, 523FF321 ÷ FFEF
(ड़) X=8, 56421235 ÷ 7767

हलः (च) भाजक =1011, भाज्य = 2132211, भाजक का आधार संख्या= 1000

भाजक 1011	2 1 3 2	2 1 1	
विचलन 011	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$		
संशोधन गुणक 0$\bar{1}$ $\bar{1}$	0 $\bar{1}$	$\bar{1}$	
	0	$\bar{1}$ $\bar{1}$	
		0 1 1	
भागफल	2 1 1 $\bar{1}$	0 1 2	शेषफल

भागफल=211$\bar{1}$=$(2103)_4$, शेषफल =$(012)_4$

बीजांक एवं वैकल्पिक बीजांक विधियों से उत्तर की परिशुद्धता का परीक्षण भी किया जा सकता है। भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

बीजांक⟶ 3=3×3+3 =3, वैकल्पिक बीजांक ⟶1=1× 3 +1 =1

दशमलव युक्त भागफल ज्ञात करने के लिए विभाजन रेखा के स्थान पर दशमलव प्रयुक्त किया जाता है। यथा

भाजक 1011	2 1 3 2	2 1 1 0 0 0
विचलन 011	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$	
संशोधन गुणक 0$\bar{1}$ $\bar{1}$	0 $\bar{1}$	$\bar{1}$
	0	$\bar{1}$ $\bar{1}$
		0 1 1
		0 0 0
		0 $\bar{1}$ $\bar{1}$
		0 $\bar{2}$ $\bar{2}$
भागफल	2 1 1 $\bar{1}$.	0 1 2 $\bar{1}$ $\bar{3}$ $\bar{2}$

भागफल= 211$\bar{1}$. 012$\bar{1}$ $\bar{3}$ $\bar{2}$= $(2103 .011202)_4$

(छ) X=4, भाजक =3331, भाज्य = 132113311, भाजक का आधार संख्या = 10000

भाजक 3331	1 3 2 1 1	3 3 1 1	
विचलन 00$\bar{1}$1	0 0 1 $\bar{1}$		
संशोधन गुणक 001$\bar{1}$	0 0 3	$\bar{3}$	
	0 0	2 $\bar{2}$	
	0	0 2 $\bar{2}$	
		0 0 3 $\bar{3}$	
भागफल	1 3 2 2 3	2 3 2 $\bar{2}$	शेषफल

भागफल = $(13223)_4$, शेषफल= $(232\bar{2})_4$ = $(2312)_4$

दशमलव युक्त भागफल ज्ञात करने के लिए विभाजन रेखा के स्थान पर दशमलव प्रयुक्त किया जाता है। यथा

भाजक 3331	1 3 2 1 1	3 3 1 1 0 0 0
विचलन 00$\bar{1}$1	0 0 1 $\bar{1}$	
संशोधन गुणक 001$\bar{1}$	0 0 3	$\bar{3}$
	0 0	2 $\bar{2}$
	0	0 2 $\bar{2}$
		0 0 3 $\bar{3}$
		0 0 2 $\bar{2}$
		0 0 3 $\bar{3}$
		0 0 2 $\bar{2}$
भागफल	1 3 2 2 3 .	2 3 2 0 1 $\bar{1}$ · $\bar{2}$

भागफल = 1 3 2 2 3 . 2 3 2 0 1 $\bar{1}$ $\bar{2}$ = $(13223.2320022)_4$

(ज) X=16, भाजक =1011, भाज्य = A1CD06513BD, भाजक की आधार संख्या= 1000

भाजक 1011	A 1 C D 0 6 5 1	3 B D
विचलन 011	0 $\bar{A}$ $\bar{A}$	
संशोधन गुणक 0$\bar{1}$ $\bar{1}$	0 $\bar{1}$ $\bar{1}$	
	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$	
	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$	
	0 3 3	
	0 $\bar{2}$	$\bar{2}$
	0	$\bar{6}$ $\bar{6}$
		0 $\bar{2}$ $\bar{2}$
भागफल	A 1 2 2 $\bar{3}$ 2 6 2	$\bar{5}$ 3 B शेषफल

भागफल = A 122$\bar{3}$262 -1 = A122$\bar{3}$2 61=$(A121D261)_{16}$

शेषफल = $\bar{5}$3 B+1011=1$\bar{5}$4C = $(B4C)_{16}$, दशमलव युक्त भागफल ज्ञात करने के लिए

भाजक 1011	A 1 C D 0 6 5 1	3 B D
विचलन 011	0 $\bar{A}$ $\bar{A}$	
संशोधन गुणक 0$\bar{1}$ $\bar{1}$	0 $\bar{1}$ $\bar{1}$	
	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$	
	0 $\bar{2}$ $\bar{2}$	
	0 3 3	
	0 $\bar{2}$	$\bar{2}$
	0	$\bar{6}$ $\bar{6}$
		0 $\bar{2}$ $\bar{2}$
		0 5 5
		0 $\bar{3}$ $\bar{3}$
		0 12
भागफल	A 1 2 2 $\bar{3}$ 2 6 2 .	$\bar{5}$ 3 $_1$0 2 F

भागफल $= A122\bar{3}26\,2\,.\,\bar{5}4\,0\,2\,F = (A121D261.B402F)_{16}$

(झ) X=16, भाजक =FFEF, भाज्य = 523FF321, भाजक का आधार संख्या= 10000

भाजक FFEF	5 2 3 F	F 3 2 1
विचलन $00\bar{1}\bar{1}$	0 0 5	5
संशोधन गुणक 0011	0 0	2 2
	0	0 3 3
		0 0 14 14
भागफल	5 2 3 $_{1}4$	$_{1}6$ 9 A 5 शेषफल

शेषफल में भाग देने पर

भाजक FFEF	1	6 9 A 5 0 0 0 0
विचलन $00\bar{1}\bar{1}$		0 0 1 1
संशोधन गुणक 0011		0 0 6 6
		0 0 9 9
		0 0 B B
		0 0 C C
भागफल	1.	6 9 B C F $_{1}4$ $_{1}7$

अभीष्ट भागफल=5244+1.69BD057 $=(5245.69BD057)_{16}$

(ङ) X=8, भाजक =7767, भाज्य = 56421235, भाजक का आधार संख्या= 10000

भाजक 7767	5 6 4 2	1 2 3 5
विचलन $00\bar{1}\bar{1}$	0 0 5	5
संशोधन गुणक 0011	0 0	6 6
	0	0 4 4
		0 0 7 7
भागफल	5 6 4 7	$_{1}4$ $_{1}4$ $_{1}6$ $_{1}4$ शेषफल

भागफल $=(5647)_8$, शेषफल$=(15574)_8$

शेषफल में भाग देने पर

भाजक 7767	1	5 5 7 4 0 0 0 0
विचलन $00\bar{1}\bar{1}$		0 0 1 1
संशोधन गुणक 0011		0 0 5 5
		0 0 5 5
		0 0 10 10
		0 0 12 12
भागफल	1 .	5 5 $_{1}0$ $_{1}2$ $_{1}2$ $_{1}7$ $_{2}2$ $_{1}2$

भागफल =1.56133932

अभीष्ट भागफल =5647+1.56133932

$= (5648.56133932)_8$

6.3 उर्ध्वतिर्यक् एवं ध्वजांक विधि :
(Vertically and Crosswise and Flag Digit Method)

इस विधि द्वारा किसी भी प्रकार की भाग संकिया की जा {11–20} सकती है। क्रियापद निम्नवत् हैं:–

कियाविधि (Procedure) : (1) भाज्य एवं भाजक का निर्धारण किया जाता है तथा यथा स्थान लिखा जाता है। (2) भाजक की आधार संख्या ज्ञात करके भाजक को विभाजित किया जाता है । भागफल संशोधित भाजक एवं शेषफल ध्वजांक कहलाता है। (3) भाजक की आधार संख्या में शून्यों की संख्या के तुल्य भाज्य के अंकों के पश्चात विभाजन रेखा खीची जाती है। यदि भाज्य दशमलव युक्त हो तो यह रेखा दशमलव के पश्चात अंक गिनकर खीची जाती है। रेखा के बायीं ओर अनुमानित भागफल एवं दायीं ओर अनुमानित शेषफल होता है। (4) भाज्य का प्रथम अंक सकल भाज्य एवं वास्तविक भाज्य होता है, इसको संशोधित भाजक से विभाजित करके भागफल का प्रथम अंक प्राप्त किया जाता है। जो बचता है, वह प्रथम अवशेष कहलाता है, इसको भाज्य के प्रथम एवं द्वितीय अंक के मध्य नीचे लिखा जाता है। (5) प्रथम अवशेष एवं भाज्य का द्वितीय अंक भागफल के द्वितीय अंक हेतु सकल भाज्य होता है। (6) ध्वजांक एवं प्रथम अंक एवं भागफल के प्रथम अंक का गुणनफल द्वन्द्वयोग कहलाता है। (7) सकल भाज्य एवं द्वन्द्वयोग का अन्तर वास्तविक भाज्य कहलाता है। (8) वास्तविक भाज्य को संशोधित भाजक से विभाजित करके भागफल का द्वितीय अंक प्राप्त किया जाता है। द्वितीय अवशेष को भाज्य के द्वितीय एवं तृतीय अंक के मध्य नीचे लिखा जाता है।

(9) भागफल के तृतीय अंक हेतु द्वन्द्वयोग = भागफल का द्वितीय अंक × ध्वजांक का प्रथम अंक + भागफल का प्रथम अंक × ध्वजांक का द्वितीय अंक

(10) सकल भाज्य से वास्तविक भाज्य ज्ञात करके भागफल का तृतीय अंक ज्ञात किया जाता है।

(11) कियापद (5) से (10) तक की पुनरावृत्ति करके भाग संकिया पूर्ण की जाती है।

(12) विभाजन रेखा दशमलव विन्दु के स्थान को व्यक्त करती है।

उदाहरण (2) (च) X=4, 3233 ÷ 21 (छ) X=8, 5574237 ÷ 213

(ज) X=16, FCEBFBF ÷ B2 (झ) X=16, CD9A.45EF ÷ 10.ABF

(ड़) X=16, A486ABFDE ÷ FBCDEA97

हल : (च) X=4, भाजक =21, भाज्य =323312, भाजक का आधार =10,

संशोधित भाजक =2, ध्वजांक =1

द्वन्द्वयोग			1 ↑ 1 / 1	1 ↑ 2 / 2	1 ↑ 2 / 2	1 ↑ 2 / 2	1 ↑ 1 / 1	
सकल भाज्य		3	12	13	13	11	12	
वास्तविक भाज्य		3	11	11	11	3	11	
ध्वजांक	1	3	2	3	3	1	2	0
संशोधित भाजक	2		1	1	1	1	1	1
भागफल		1	2	2	2	1.	2	2

यथेष्ट अभ्यास के उपरान्त निम्नवत हल किया जा सकता है।

ध्वजांक	1	3	2	3	3	1	2	0
संशोधित भाजक	2		1	1	1	1	1	1
भागफल		1	2	2	2	1.	2	2

(छ) X=8, भाजक =213, भाज्य =5574237, भाजक का आधार =100,
संशोधित भाजक =2, ध्वजांक =13

द्वन्द्वयोग			1	1 3	1 3	1 3	1 3	1 3	
			2	2 5	5 1	1 1	1 6	6 4	
			2	13	20	4	11	26	
सकल भाज्य		5	15	17	24	22	23	27	
वास्तविक भाज्य		5	13	4	4	16	12	1	
ध्वजांक	13	5	5	7	4	2 |	3	7	0
संशोधित भाजक	2		1	1	2	2 |	2	2	1
भागफल		2	5	1	1	6 .	4	0	4

यथेष्ट अभ्यास के उपरान्त निम्नवत हल किया जा सकता है।

ध्वजांक	13	5	5	7	4	2 |	3	7	0
संशोधित भाजक	2		1	1	2	2 |	2	2	1
भागफल		2	5	1	1	6 .	4	0	4

(ज) X=16, भाजक = B2, भाज्य = FCEBFBF, भाजक का आधार =10,
संशोधित भाजक =B, ध्वजांक =2

द्वन्द्वयोग			2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
			1	6	B	C	0	B	2	3	F	4
			2	C	16	18	0	16	4	6	1E	8
सकल भाज्य		F	4C	8E	9B	1F	7B	2F	30	B0	50	60
वास्तविक भाज्य		F	4A	82	85	7	7B	19	2C	AA	32	58
ध्वजांक	2	F	C	E	B	F	B |	F	0	0	0	0
संशोधित भाजक	B		4	8	9	1	7 |	2	3	B	5	6
भागफल		1	6	B	C	0	B.	2	3	F	4	8

यथेष्ट अभ्यास के उपरान्त निम्नवत हल किया जा सकता है।

ध्वजांक	2	F	C	E	B	F	B |	F	0	0	0	0
संशोधित भाजक	B		4	8	9	1	7 |	2	3	B	5	6
भागफल		1	6	B	C	0	B.	2	3	F	4	8

(झ) X=16, भाजक = 10.ABF, भाज्य = CD9A.45EF,
संशोधित भाजक =10, ध्वजांक =ABF

द्वन्द्वयोग			A	A B	A B F	A B F	A B F	A B F			
			0	0 C	0 C 5	C 5 5	5 5 1	5 1 D			
			0	78	B6	11D	8C	D8	10C	164	13F
सकल भाज्य		C	CD	D9	11A	144	175	19E	16F	230	1C0
वास्तविक भाज्य		C	CD	61	64	27	E9	C6	63	CC	81
ध्वजांक	ABF	C	D	9	A |	4	5	E	F	0	0
संशोधित भाजक	10		C	D	11 |	14	17	19	16	23	1C
भागफल		0	C	5	5 .	1	D	B	4	B	7

यथेष्ट अभ्यास के उपरान्त

ध्वजांक	ABF	C	D	9	A	4	5	E	F	0	0	
संशोधित भाजक 10			C	D	11	14	17	19	16	23	1C	
भागफल		0	C	5	5.	1	D	B	4	B	7	

(ड़) X=16,भाजक=FBCDEA97, भाज्य= A486ABFDE,

भाजक का आधार =10000000, संशोधित भाजक =F, ध्वजांक =BCDEA97

सकल भाज्य		A	A4	E8	136	17A	17B	15F	FD	4E
वास्तविक भाज्य		A	A4	7C	71	62	15	F	$\overline{38}$	$\overline{8D}$
ध्वजांक	BCDEA97	A	4	8	6	A	B	F	D	E 9
संशोधित भाजक F			A	E	13	17	17	15	F	4
भागफल		0	A .	7	6	5	0	0	$\overline{4}$	$\overline{A}$

भागफल $= A.76500\overline{4}\,\overline{A} = (A.764FFB6)_{16}$

यथेष्ट अभ्यास के उपरान्त

ध्वजांक	BCDEA97	A	4	8	6	A	B	F	D	E	9
संशोधित भाजक F			A	E	13	17	17	15	F	4	
भागफल		0	A .	7	6	5	0	0	$\overline{4}$	$\overline{A}$	

6.4 निष्कर्ष (Conclusion) :

भाग संक्रिया में भाजक के आधार संख्या के निकट होने पर विचलन विधि का उपयोग महत्वपूर्ण है, इस विधि में भाज्य का प्रथम अंक भागफल का प्रथम अंक होता है। भाजक की आधार संख्या से प्राप्त विचलन को विपरीत चिन्हांकित करके संशोधन गुणक प्राप्त होता है, जो गणना में महत्वपूर्ण कार्य करता है। उर्ध्वतिर्यक एवं ध्वजांक विधि द्वारा किसी भी प्रकार की भाग संक्रिया की जा सकती है। भाजक की आधार संख्या ज्ञात होने पर इसे भाजक से विभाजित करने से भागफल संशोधित भाजक एवं शेषफल ध्वजांक कहलाता है। ध्वजांक द्वन्द्वयोग में सहायक होता है। संशोधित भाजक से वास्तविक भाज्य को विभाजित करते हुए भाग संक्रिया पूरी की जाती है। भाज्य का प्रथम अंक सकल भाज्य एवं वास्तविक भाज्य होता है। वैदिक गणित के सूत्रों से भाग संक्रिया में गणनाओं की जटिलता घट जाती है।

6.5 संदर्भ ग्रन्थ **(References)** :

{1} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{2} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{3} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{4} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{5} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{6} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।

{7} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।

{8} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{9} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{10} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{11} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp. 17-19.

{12} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिकगणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।

{13} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{14} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol.. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{15} Kailash, Program for Recurring Decimals, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 73-74.

{16} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{17} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{18} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{19} Kailash & L. P. Vishwakarma, Concept of Boudhayan Numbers (Part I), Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 26, 2006, pp. 16-32.

{20} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

अध्याय सात

संख्याओं के मूल
(Roots of Numbers)

प्रकाशन (Publication)

- पूर्णघात संख्याओं के मूल, Proceedings, Bhaskariyam-Bharatimam-Dhanvatariyam, Dec. 2006, Bangalore, pp.58-64.

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, आनुरुप्येण एवं विलोकनम्।

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

7.2 संख्याओं के वर्गमूल (Square Root of Numbers)

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल

(Square Root of Numbers in Four Digit Number System)

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल

(Square Root of Numbers in Octal Number System)

(ग) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल

(Square Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

7.3 संख्याओं के घनमूल (Cube Root of Numbers)

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली में संख्याओं के घन मूल

(Cube Root of Numbers in Four Digit Number System)

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली में संख्याओं के घनमूल

(Cube Root of Numbers in Octal Number System)

(ग) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के घनमूल

(Cube Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

7.4 संख्याओं के चतुर्थमूल (Fourth Root of Numbers)

(क) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के चतुर्थमूल

(Fourth Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

7.5 संख्याओं के पंचम मूल (Fifth root of numbers)

(क) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के पंचम मूल

(Fifth Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

7.6 निष्कर्ष (Conclusion)

7.7 संदर्भ ग्रन्थ (References)

7.1 प्रस्तावना (Introduction) :

वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों का प्रयोग संख्याओं के मूल ज्ञात करने में किया जा सकता है। प्रस्तुत अध्याय में पूर्णघात संख्याओं के मूल (वर्गमूल, घनमूल, चतुर्थमूल एवं पंचममूल) को विलोकनम् विधि से ज्ञात किया गया है। मूल ज्ञात करने के लिए तीन तालिकाओं का उपयोग करते हैं। पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल, पूर्ण घन संख्याओं के घनमूल को चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणालियों में ज्ञात करने की विधियों की सोदाहरण विवेचना की गई है। पूर्ण चतुर्थघात संख्याओं के चतुर्थमूल, पूर्ण पंचमघात संख्याओं के पंचममूल को षोडश अंकीय प्रणाली में ज्ञात करने की विधियों की सोदाहरण विवेचना की गई है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यून पूर्वेण आनुरुप्येण एवं विलोकनम् आदि का उपयोग करते हुये पूर्णघात संख्याओं के मूल को सोदाहरण {1–10} समझाया गया है।

7.2 संख्याओं के वर्गमूल (Square Root of Numbers) :

किसी पूर्णवर्ग संख्या का वर्गमूल विलोकनम् विधि से ज्ञात किया जाता है।

7.2(क) चतुष्अंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल : (Square Root of Numbers in Four Digit Number System)

चतुष्अंकीय प्रणाली में वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, वर्गसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	10
वर्ग संख्या	1	10	21	100
बीजांक	1	1	3	1

2. पूर्णवर्ग संख्या के वर्गमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णवर्ग संख्या के चरमांक	वर्गमूल के चरमांक
0	2
1	विषम अंक
00	0

3. निकटतम वर्गमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम वर्गमूल
1–3	1
10–20	2
21–33	3

विशेष :– (1) पूर्ण वर्ग संख्या का बीजांक 1 एवं 3 होता है।

टिप्पणी : संख्या का बीजाक 1 एवं 3 होने पर यह आवश्यक नहीं है, कि संख्या पूर्ण वर्ग हो।

(2) अपूर्ण वर्ग संख्या का चरमांक 2 या 3 एवं बीजांक 2 होता है।

उदाहरण (1) $(1101)_4$ का वर्गमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt{11,01}$ =21 या 23

अभीष्ट वर्गमूल = 21

क्रियापदः (1) दाये से दो–दो अंकों के जोडे. बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा= 11, दूसरा जोड़ा = 01

(2) वर्ग संख्या के चरमांक को देखकर वर्गमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

वर्ग संख्या का चरमांक = 1, वर्गमूल का चरमांक = 1 या 3 (1 का परममित्र अंक)

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम वर्गमूल ज्ञात किया जाता है। संख्या के पहले जोड़े 11 का निकटतम वर्गमूल = 2, चरमांक एवं दहाई के अंक से संभावित वर्गमूल = 21 या 23

(4) निखिल अंक समान (अर्थात 2) एवं चरमांक 2 वाली संख्या 22 की वर्गसंख्या $22^2 = 1210$

(5) संख्या, 22 की वर्गसंख्या से तुलना करने पर, 1101 < 1210 (6) अतः अभीष्ट वर्गमूल = 21

उदाहरण (2) $(31021)_4$ का वर्गमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt{3,10,21}$ = 131 या 133

अभीष्ट वर्गमूल = 131

क्रियापद : (1) दायें से दो–दो अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा = 3, दूसरा जोड़ा =10, तीसरा जोड़ा = 21

(2) वर्ग संख्या के चरमांक को देखकर वर्गमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

संख्या का चरमांक = 1, वर्गमूल का चरमांक = 1 या 3 (1 का परममित्र अंक)

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम वर्गमूल ज्ञात किया जाता है।

पहले जोड़े 3 का निकटतम वर्गमूल = 1

(4) वर्गमूल के सैकड़े के अंक एवं चरमांक 2 तथा 3 वाली संख्याओं की वर्गसंख्याओं को ज्ञात किया जाता है। अतः $12^2 = 120, 13^2 = 301$

(5) इन वर्ग संख्याओं से तुलना करके तथा संकलन – व्यवकलनाभ्याम् विधि से निकटतम वर्गमूल को ज्ञात किया जाता हैं तुलना करने पर स्पष्ट है कि संख्या 310 संख्या 13 के वर्ग के निकट है। स्पष्ट निकटतम वर्गमूल = 13

(6) सम्भावित वर्गमूल 131 एवं 133 हैं।

(7) चरमांक 2 वाली संख्या 132 का वर्गफल = 32010

(8) वर्ग संख्या इस संख्या से छोटी है। अतः अभीष्ट वर्गमूल = 131

7.2(ख) अष्टअंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल :
(Square Root of Numbers in Octal Number System)

अष्टअंकीय प्रणाली में वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, वर्गसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
वर्गसंख्या	1	4	11	20	31	44	61	100
बीजांक	1	4	2	2	4	1	7	1

2. पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णवर्ग संख्या का चरमांक	वर्गमूल का चरमांक
0	4
1	विषय अंक
4	2 या 6 (परममित्र अंक)
00	0

3. निकटतम वर्गमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम वर्गमूल	संख्या	निकटतम वर्गमूल
1–3	1	20–30	4
4–10	2	31–43	5
11–17	3	44–60	6
		61–77	7

विशेष : (1) पूर्णवर्ग संख्या का बीजांक 1,2,4 एवं 7 होता है।

टिप्पणी : संख्या का बीजांक 1, 2, 4 एवं 7 होने पर पूर्णवर्ग संख्या होना आवश्यक नहीं है।

(2) अपूर्ण वर्ग संख्या का चरमांक 2, 3, 5 एवं 7 एवं बीजांक 3, 5 एवं 6 होता है।

उदाहरण (3) $(6444)_8$ का वर्गमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt{64,44} = 72$ या 76

अभीष्ट वर्गमूल =72

क्रियापद : (1) दायें से बायें दो–दो अंकों के जोड़े बनाए जाते हैं।

पहला जोड़ा = 64, दूसरा जोड़ा = 44

(2) वर्गसंख्या के चरमांक को देखकर वर्गमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

वर्गसंख्या का चरमांक =4, वर्गमूल का चरमांक =2 या 6 (परममित्र अंक)

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम वर्गमूल ज्ञात किया जाता है। संख्या के पहले जोड़े 64 का निकटतम वर्गमूल = 7 । चरमांक एवं दहाई के अंक से संभावित वर्गमूल =72या 76

(4) निखिल अंक समान(7) एवं चरमांक 5 वाली संख्या 75 की वर्ग संख्या $=75^2=7211$

(5) संख्या 75 की वर्ग संख्या से तुलना करने पर 6444 <7211 (6) अतः अभीष्ट वर्गमूल = 72

उदाहरण (4) $(20420)_8$ का वर्गमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt{2,04,20} = 134$

अभीष्ट वर्गमूल =134

क्रियापद :(1) दायें से बायें दो–दो अंकों के जोड़े बनाए जाते हैं।

पहला जोड़ा = 2, दूसरा जोड़ा = 04, तीसरा जोड़ा =20.

(2) वर्गसंख्या के चरमांक को देखकर वर्गमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

वर्गसंख्या का चरमांक =0, वर्गमूल का चरमांक =4

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम वर्गमूल ज्ञात किया जाता है। संख्या के पहले जोड़े 2 का निकटतम वर्गमूल =1

(4) वर्गमूल के सैकड़े के अंक एवं चरमांक 2 एवं 3 वाली संख्याओं की वर्ग संख्याओं को ज्ञात किया जाता है। $12^2=144, 13^2=171$

(5) इन वर्ग संख्याओं से तुलना करके तथा संकलन – व्यवकलनाभ्याम् विधि से निकटतम वर्गमूल को ज्ञात किया जाता हैं। तुलना करने पर स्पष्ट है कि संख्या 204 संख्या 13 के वर्ग के निकट है। स्पष्ट है निकटतम वर्गमूल = 13 (6) अतः अभीष्ट वर्गमूल = 134

7.2(ग) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के वर्गमूल :
(Square Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

षोडशअंकीय प्रणाली में वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, वर्गसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
वर्गसंख्या	1	4	9	10	19	24	31	40	51	64	79	90	A9	C4	E1	100
बीजांक	1	4	9	1	A	6	4	4	6	A	1	9	4	1	F	1

2.. पूर्णवर्ग संख्या के वर्गमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णवर्ग संख्या का चरमांक	वर्गमूल का चरमांक
0	8,4 या C (परममित्र अंक)
1	1 या F (परममित्र अंक), 7 या 9 (परममित्र अंक)
4	2 या E (परममित्र अंक), 6 या A (परममित्र अंक)
9	3 या D(परममित्र अंक), 5 या B (परममित्र अंक)
00	0

3. निकटतम वर्गमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम वर्गमूल	संख्या	निकटतम वर्गमूल
1-3	1	40-50	8
4-8	2	51-63	9
9-F	3	64-78	A
10-18	4	79-8F	B
19-23	5	90-A8	C
24 -30	6	A9-C3	D
31-3 F	7	C4- E0	E
		E1- FF	F

विशेष : (1) पूर्णवर्ग संख्या का बीजांक 1, 4, 6, 9, A एवं F होता है।
टिप्पणी : संख्या का बीजांक 1, 4, 6, 9, A एवं F होने पर यह आवश्यक नहीं है, कि संख्या पूर्णवर्ग हो। (2) अपूर्णवर्ग संख्या का बीजांक 2, 3, 5, 7, 8, B, C, D एवं E तथा चरमांक 2, 3, 5, 6, 7, 8, A, B, C, D, E एवं F होता है।

उदाहरण (5) $(CBI)_{16}$ का वर्गमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt{C,B1}$ = 31, 37, 39, या 3F

अभीष्ट वर्गमूल = 39

क्रियापद (1) दायें से दो–दो अंकों के जोड़े बनाए जाते हैं।

पहला जोड़ा = C, दूसरा जोड़ा = B1

(2) वर्गसंख्या के चरमांक को देखकर वर्गमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

वर्गसंख्या का चरमांक = 1, वर्गमूल का चरमांक 1 या F, 7 या 9 है।

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम वर्गमूल ज्ञात किया जाता है। पहले जोड़े C का निकटतम वर्गमूल = 3, चरमांक एवं दहाई अंक से संभावित वर्गमूल = 31,37, 39 या 3F

(4) निखिल अंक समान अर्थात 3 एवं चरमांक 8 एवं A वाली संख्याओं की वर्ग संख्यायें,
38^2 = C40, $3A^2$ = D 24

(5) संख्या को 38 एवं 3 A की वर्गसंख्याओं से तुलना करने पर, C40 <CBI<D24

(6) अतः अभीष्ट वर्गमूल = 39

7.3 संख्याओं के घनमूल (Cube Root of Numbers) :

किसी पूर्णघन संख्या का घनमूल विलोकनम् विधि से ज्ञात {11–14} किया जाता है।

7.3(क) चतुष्अंकीय प्रणाली में संख्याओं के घनमूल : (Cube Root of Numbers in Four Digit Number System)

चतुष्अंकीय प्रणाली में घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, घनसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	10
घनसंख्या	1	20	123	1000
बीजांक	1	2	3	1

2. पूर्णघन संख्या के घनमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णघन संख्या का चरमांक	घनमूल का चरमांक
0	2
1	1
3	3
000	0

3. निकटतम घनमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम घनमूल
1–13	1
20–32	2
33–333	3

विशेष: (1) पूर्णघन संख्या का बीजांक 1, 2 एवं 3 होता है।

टिप्पणी : संख्या का बीजांक 1, 2 एवं 3 होने पर आवश्यक नहीं है कि वह पूर्णघन संख्या हो।

(2) अपूर्णघन संख्या का चरमांक 2 होता है।

उदाहरण (1) $(3, 120)_4$ का घनमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt[3]{3,120} = 12$

क्रियापद : (1) दायें से तीन–तीन अकों के लिए जोड़े बनाये जाते हैं।
पहला जोड़ा = 3, दूसरा जोड़ा = 120

(2) संख्या के चरमांक को देखकर घनमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।
संख्या का चरमांक = 0, घनमूल का चरमांक = 2

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम घनमूल ज्ञात किया जाता है।
पहला जोड़ा = 3, निकटतम घनमूल = 1

(4) यही दोनों अंक मिलकर अभीष्ट घनमूल होते हैं। अभीष्ट घनमूल = 12

उदाहरण (2) $(310233)_4$ का घनमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt[3]{310,233} = 33$

क्रियापद : (1) दायें से तीन–तीन अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।
पहला जोड़ा = 310, दूसरा जोड़ा = 233
(2) संख्या के चरमांक को देखकर घनमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।
संख्या का चरमांक = 3, घनमूल का चरमांक = 3
(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम घनमूल ज्ञात किया जाता है।
पहला जोड़ा = 310, निकटतम घनमूल = 3
(4) यही दोनों अंक मिलकर अभीष्ट घनमूल होते हैं। अभीष्ट घनमूल = 33

7.3(ख) अष्टअंकीय प्रणाली में संख्याओं के घनमूल : (Cube Root of Numbers in Octal Number System)

अष्टअंकीय प्रणाली में घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, घनसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
घनसंख्या	1	10	33	100	175	330	527	1000
बीजांक	1	1	6	1	6	6	7	1

2. पूर्णघन संख्या के घनमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णघन संख्या का चरमांक	घनमूल कर चरमांक
0	2 या 6 (परममित्र अंक)
1,3,5,7	1,3,5,7
00	4
000	0

3. निकटतम घनमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम घनमूल	संख्या	निकटतम घनमूल
1-7	1	175-327	5
10-32	2	330-526	6
33-77	3	527-777	7
100-174	4		

विशेष (1) पूर्णघन संख्या का बीजांक 1, 6 एवं 7 होता है।

टिप्पणी : संख्या का बीजांक 1, 6 एवं 7 होने पर पूर्णघन संख्या होना आवश्यक नहीं है।

(2) अपूर्णघन संख्या का चरमांक 2, 4 एवं 6 तथा बीजांक 2, 3, 4 एवं 5 होता है।

उदाहरण (3) $(36411)_8$ का घनमूल ज्ञात करना।
हल : $\sqrt[3]{36,441} = 31$
क्रियापद (1) दायें से तीन–तीन अंकों के जोड़े बनाये जाते है।
पहला जोड़ा = 36, दूसरा जोड़ा = 411
(2) संख्या का चरमांक = 1, घनमूल का चरमांक = 1
(3) संख्या का पहला जोड़ा = 36, निकटतम घनमूल = 3 (4) अभीष्ट घनमूल = 31
उदाहरण (4) $(3300)_8$ का घनमूल ज्ञात करना।
हल : $\sqrt[3]{3,300} = 14$
क्रियापदः (1) दायें से तीन–तीन अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा = 3, दूसरा जोड़ा = 300

(2) संख्या के दायी ओर 00 होने पर चरमांक = 4

(3) पहला जोड़ा = 3, निकटतम घनमूल = 1 (4) अभीष्ट घनमूल = 14

7.3(ग) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के घनमूल : (Cube Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

षोडशअंकीय प्रणाली में घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, घनसंख्या एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
घनसंख्या	1	8	1B	40	7D	D8	157	200	2D9	3E8	533	6C0	895	AB8	D2F	1000
बीजांक	1	8	C	4	5	6	D	2	9	A	B	3	7	E	F	1

2. पूर्णघन संख्या के घनमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णघन संख्या का चरमांक	घनमूल का चरमांक	पूर्णघन संख्या का चरमांक	घनमूल का चरमांक
0	4 या C (परममित्र अंक)	D	5
1,7,9, F	1, 7, 9, F	5	D
8	2याE(परममित्रअंक),6याA(परममित्र अंक)	00	8
3	B	000	0
B	3		

3. निकटतम घनमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम घनमूल	संख्या	निकटतम घनमूल	संख्या	निकटतम घनमूल
1-7	1	D8-156	6	533-6BF	B
8-1A	2	157-1FF	7	6CO-894	C
1B-3F	3	200 – 2D8	8	895-AB7	D
40–7C	4	2D9-3E7	9	AB8-D2E	E
7D-D7	5	3E8-532	A	D2F-FFF	F

विशेष : अपूर्णघन संख्या का चरमांक 2,4, 6, A, C या E होता है।

उदाहरण (5) $(3FADE1)_{16}$ का घनमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt[3]{3FA, DE1} = A1$

क्रियापद : (1) दायें से तीन–तीन अकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा =3FA, दूसरा जोड़ा = DE1

(2) संख्या के चरमांक को देखकर घनमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

संख्या का चरमांक = 1, घनमूल का चरमांक = 1

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम घनमूल ज्ञात किया जाता है।

पहला जोड़ा = 3FA, निकटतम घनमूल =A

(4) यही दोनों मिलकर अभीष्ट घनमूल होते हैं। अभीष्ट घनमूल =A1

उदाहरण (6) $(434E40)_{16}$ का घनमूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt[3]{434, E40} = A4$ या AC

अभीष्ट घनमूल = A4

क्रियापद (1) दायें से तीन–तीन अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा = 434, दूसरा जोड़ा = E40

(2) संख्या के चरमांक को देखकर घनमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।
संख्या का चरमांक = 0, घनमूल का चरमांक = 4 या C (परममित्र अंक)
(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम घनमूल ज्ञात किया जाता है। पहला जोड़ा = 434
निकटतम घनमूल = A (4) चरमांक एवं दहाई के अंक से संभावित घनमूल = A4 या AC
(5) निखिल अंक समान (अर्थात A) एवं चरमांक 5 वाली संख्या A5 की घन संख्या
$A5^3$ = 448B5D
(6) संख्या को, A5 की घनसंख्या से तुलना करने पर 434E40 <448B5D। अभीष्ट घनमूल=A4

7.4 संख्याओं के चतुर्थमूल (Fourth Root of Numbers) :

किसी पूर्ण चतुर्थघात संख्या का चतुर्थमूल विलोकनम् विधि से ज्ञात {15–19} किया जाता है।

7.4(क) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के चतुर्थमूल : (Fourth Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

षोडशअंकीय प्रणाली में चतुर्थमूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, चतुर्थघात एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
चतुर्थघात	1	10	51	100	271	510	961	1000	19A1	2710	3931	5100	6F91	9610	C5C1	10000
बीजांक	1	1	6	1	A	6	1	1	6	A	1	6	1	1	F	1

2.पूर्ण चतुर्थघात संख्या के चतुर्थमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्णचतुर्थघात संख्या का चरमांक	चतुर्थमूल का चरमांक
0	2 या E (परममित्र अंक), 6 या A (परममित्र अंक)
1	विषम अंक
00	4 या C (परममित्र अंक)
000	8
0000	0

3. निकटतम चतुर्थमूल के लिए सारणी :

संख्या	निकटतम चतुर्थमूल	संख्या	निकटतम चतुर्थमूल	संख्या	निकटतम चतुर्थमूल
1-F	1	510-960	6	3931-50FF	B
10-50	2	961-FFF	7	5100-6F90	C
51-FF	3	1000-19A0	8	6F91-960F	D
100-271	4	19A1-270F	9	9610-C5C0	E
271-50F	5	2710-3930	A	C5C1-FFFF	F

विशेष : (1) पूर्णचतुर्थघात संख्या का बीजांक 1, 6, A एवं F होता है।
टिप्पणी : संख्या का बीजांक 1, 6, A एवं F हाने पर आवश्यक नहीं कि संख्या पूर्णचतुर्थघात संख्या हो।
(2) अपूर्ण चतुर्थघात संख्या का चरमांक 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E एवं F एवं बीजांक 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, A, B, C, D, E होता है।
उदाहरण (1) $(280C, 5A81)_{16}$ का चतुर्थमूल ज्ञात करना ।

हल : $\sqrt[4]{280C,5A81}$ = A1, A3, A5, A7, A9, AB, AD या AF

अभीष्ट चतुर्थमूल = A1

क्रियापद : (1) दायें से चार–चार अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा =280C, दूसरा जोड़ा = 5A81

(2) संख्या के चरमांक को देखकर चतुर्थमूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

संख्या का चरमांक =1 चतुर्थमूल का चरमांक =1, 3, 5, 7, 9, B, D या F

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम चतुर्थमूल ज्ञात किया जाता है। पहला जोड़ा = 280C, निकटतम चतुर्थमूल =A

(4)

संभावित चतुर्थमूल बीजांक	A1 B	A3 D	A5 F	A7 2	A9 4	AB 6	AD 8	AF A

(5) संख्या का बीजांक = 1

(6) संभावित चतुर्थमूल = A1, A3, A7,A9, AD

(7) $A2^4$ = 290D7410

280C5A81<290D7410

(8) अभीष्ट चतुर्थमूल = A1

7.5 संख्याओं के पंचम मूल (Fifth Root of Numbers) :

किसी पूर्ण पंचमघात संख्या का पंचम मूल विलोकनम् विधि से ज्ञात किया जाता है।

7.5(क) षोडशअंकीय प्रणाली में संख्याओं के पंचम मूल :
(Fifth Root of Numbers in Hexadecimal Number System)

षोडशअंकीय प्रणाली में पंचम मूल ज्ञात करने के लिए निम्न सारणियों का प्रयोग करते हैं:–

1. अंक, पंचमघात एवं बीजांक के लिए सारणी :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
पंचमघात	1	20	F3	400	C35	1E60	41A7	8000	E6A9	186A0	2751B	3CC00	5AA5D	834E0	B964F	10000
बीजांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	1

2. पूर्ण पंचमघात संख्या के पंचमूल के चरमांक के लिए सारणी :

पूर्ण पंचमघात संख्या का चरमांक	पंचममूल का चरमांक
विषम अंक	पुनरावृत्ति
0	2 या E (परममित्र अंक), 6 या A (परममित्र अंक)
00	4 या C (परममित्र अंक)
000	8
0000	0

3. निकटतम पंचममूल के लिए सारणी :

संख्या	नि० पंचममूल	संख्या	नि० पंचममूल	संख्या	नि० पंचममूल
1-1F	1	1E60-41A6	6	2751B -3CBFF	B
20-F2	2	41A7-7FFF	7	3CC00-5AA5C	C
F3-3FF	3	8000-E6A8	8	5AA5D-834DF	D
400-3C4	4	E6A9-1869F	9	834E0-B964E	E
C35-1 E5F	5	186A0-2751A	A	B964F-FFFFF	F

विशेष : अपूर्णपंचमघात संख्याओं के चरमांक सम अंक होते हैं।

उदाहरण (1) $(1, CD520)_{16}$ का पंचममूल ज्ञात करना।

हल : $\sqrt[5]{1,CD520} = 12, 16, 1A, 1E$

अभीष्ट पंचममूल = 12

क्रियापद : (1) दायें से पाँच–पाँच अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।

पहला जोड़ा = 1, दूसरा जोड़ा = CD 520

(2) संख्या के चरमांक को देखकर, पंचममूल का चरमांक ज्ञात किया जाता है।

संख्या का चरमांक = 0, पंचममूल का चरमांक = 2, 6, A या E

(3) संख्या के पहले जोड़े का निकटतम पंचममूल ज्ञात किया जाता है।

पहला जोड़ा = 1, निकटतम पंचममूल = 1

(4) संभावित पंचममूल = 12, 16, 1A या 1E

(5) $13^5 = 25C843 < 1CD520$

अभीष्ट पंचममूल = 12

7.6 निष्कर्ष (Conclusion) :

चतुष्अंकीय एवं अष्टअंकीय प्रणाली में पूर्णवर्ग संख्याओं के चरमांक 1 होने पर वर्गमूल के चरमांक में विषम अंक प्राप्त होता है। षोडश अंकीय प्रणाली में पूर्णवर्ग संख्या का चरमांक 1 होने पर वर्गमूल का चरमांक 1, 1 का परममित्र अंक अर्थात F, 7 एवं 7 का परममित्र अंक अर्थात 9 होता है। चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणाली में पूर्णघन संख्याओं के चरमांक क्रमशः (1,3), (1,3,5,7) एवं (1,7,9,F) होने पर घनमूल के चरमांकों की पुनरावृत्ति होती है। षोडश अंकीय प्रणाली में पूर्ण चतुर्थघात संख्या का चरमांक 1 होने पर चतुर्थमूल के चरमांक में विषम अंक प्राप्त होते है एवं पूर्ण पंचमघात संख्या का चरमांक विषम अंक होने पर पंचममूल के चरमांक में पुनरावृत्ति होती है। षोडश अंकीय प्रणाली में अंकों की पंचम घात पर बीजांकों की पुनरावृत्ति होती है।

7.7 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{2} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{3} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{4} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{5} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{6} अमित कुमार शर्मा एवं कैलाश, पूर्णघात संख्याओं के मूल, Proceedings, Bhaskariyam-Bharatimam-Dhanvatariyam, Dec. 2006, Bangalore, pp.58-64.

{7} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{8} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{9} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।

{10} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{11} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp.7-19.

{12} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।

{13} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।

{14} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{15} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{16} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{17} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{18} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{19} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

अध्याय आठ

विभाजनीयता
(Divisibilty)

प्रकाशन (Publication)

- संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
- Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No. 3, March 2005, pp. 17-19.
- संगणकीय शिक्षा के उभरते क्षितिज (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत्, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, आनुरूप्येण, यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् एवं विलोकनम्।

8.1 प्रस्तावना (Introduction) :

दाशमिक प्रणाली में 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 एवं 11 की विभाजनीयता को संख्या को देखकर ही समझा जा सकता है परन्तु अन्य संख्याओं की विभाजनीयता हेतु भाग संक्रिया का ही आश्रय लेना पड़ता है। इस अध्याय के अर्न्तगत विभाजनीयता की चार विधियों की चर्चा की गई है, जो कि सभी अंक प्रणालियों के लिये स्वयंसिद्ध हैं। विभाजित होने की अवस्था में भागफल भी तुरन्त ज्ञात किया जा सकता है। विभिन्न अंक प्रणालियों में संख्याओं की विभाजनीयता की विवेचना वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों निखलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, विलोकनम्, एवं आनुरूप्येण का उपयोग {1–9} करते हुए सोदाहरण की गयी है।

8.2 एकाधिकेन पूर्वेण विधि (Ekadhikena Purvena Method) :

इसमें ऐसी संख्याओं के विभाजनीयता गुण का अध्ययन किया जाता है जिनके इकाई का अंक सर्वोच्च अंक होता है। प्रकिया निम्नवत् हैः–

"एकाधिकेन पूर्वेण" सूत्र द्वारा प्राचल ज्ञात किया जाता है प्रत्येक स्थान हेतु द्वन्द्वयोग ज्ञात किया जाता है। यदि सर्वोच्च स्थान पर स्वयं या भाजक का पूर्ण गुणज प्राप्त होता है तो संख्या भाजक से पूर्णतया विभाजित होती है {10–15} अन्यथा नहीं। भागफल के लिये प्रत्येक द्वन्द्वयोग के इकाई के अंक में "निखलं नवतः चरमं दशतः" सूत्र का व्यापक अर्थो में प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण (1) विभाजनीयता का अध्यन करना।

(च) X = 16, भाज्य =1 AB 45AB 004231, भाजक = 2 FFFF,

(छ) X= 2, भाज्य = 101001001110111, भाजक = 11111

(ज) X = 8, भाजक = 47, भाज्य = 11573706

हल :(च) X = 16, भाज्य = 1 AB 45AB 004231, भाजक = 2 FFFF,

प्राचल = 2FFFF + 1 = 30000 अर्थात 3, शून्यों की संख्या = 4

संख्या	1	AB45	AB00	4231
	FFFF x 3+1+1	7193x3+1+AB45	4231x3 +AB00	4231
द्वंद्वयोग	2FFFF	1FFFF	17193	4231
	FFFF	FFFF	7193	4231
	0000	0000	8E6C	BDCF

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल 8E6CBDCF है।

(छ) X= 2, भाज्य = 101001001110111, भाजक = 11111

प्राचल =11111+1 =100000 अर्थात 1, शून्यों की संख्या= 5

	10100	10011	10111
द्वंद्वयोग	11111	101010	10111
		10101	01001

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल 1010101001 है।

(ज) X = 8, भाजक = 47, भाज्य = 11573706, प्राचल = 47+1 = 50 अर्थात 5 है।

संख्या 1	1	5	7	3	7	0	6
5×7+3+1	5× 6+1	5×0+1+5	5×0+1+7	5×0+5+3	5×6+3+7	5×6+0	6
द्वंद्वयोग47	37	6	10	10	50	36	6
इकाई अंक7	7	6	0	0	0	6	6
भागफल 0	0	1	7	7	7	1	2

संख्या 11573706 भाजक 47 से विभाजित होती है तथा भागफल 177712 है।

8.3 एकन्यूनेन पूर्वेण विधि (Ekanyunena Purvena Method) :

इस विधि में ऐसे भाजकों के विभाजनीयता गुण का अध्ययन किया जाता है जिसके इकाई का अंक 1 होता है। प्रक्रिया निम्नवत है:–

'एकन्यूनेन पूर्वेण'' सूत्र द्वारा प्राचल ज्ञात किया जाता है यह ऋणात्मक होता है। प्रत्येक स्थान हेतु द्वन्द्वयोग ज्ञात किया जाता है। यदि सर्वोच्च स्थान पर भाजक या शून्य प्राप्त होता है तो संख्या भाजक से पूर्णतया विभाजित होती है {16–20} अन्यथा नहीं। भागफल के लिये प्रत्येक द्वन्द्वयोग के इकाई अंक को लिखा जाता है। यही भागफल है।

उदाहरण (2) विभाजनीयता का अध्यन करना।
(क) X =16, भाज्य= 23486FBD321F865AB, भाजक=2001
(ख) X = 16, भाज्य = AB1203A, भाजक = F1
(ग) X = 8, भाजक=51, भाज्य=107136334
हलः (क) X = 16, भाज्य= 23486FBD321F865AB, भाजक= 2001,
प्राचल = 2001-1= 2000 अर्थात $\bar{2}$, शून्यों की संख्या = 3

23	486	FBD	321	F86	5AB
011x $\bar{2}$ + $\bar{1}$ +23	A3Bx $\bar{2}$ +1+486	$\bar{5}\,\bar{4}\,1$x $\bar{2}$ +FBD	430x $\bar{2}$ +321	5ABx $\bar{2}$ +F86	5AB
0	$\bar{1}$ 011	1A3B	$\bar{5}\,\bar{4}\,1$	430	5AB
0	011	A3B	$\bar{5}\,\bar{4}\,1$	430	5AB
	11	A3A	AC1	430	5AB

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल 11 A3AAC14305AB है।
(ख) X =16, भाज्य = AB1203A, भाजक = F1, प्राचल = F1-1 = F0 अर्थात $\bar{F}$
शून्यों की संख्या = 1

भाज्य	A	B	1	2	0	3	A	
	$\bar{6}\,\bar{3}$	$\bar{4}\,\bar{7}$	75	$\bar{3}\,\bar{8}$	24	$\bar{9}\,\bar{3}$	A	नहीं

संख्या विभाजित नहीं होती है
(ग) X = 8, भाजक=51, भाज्य=10713634, प्राचल= 51-1=50 अर्थात $\bar{5}$ है।

संख्या	1	0	7	1	3	6	3	4
	$\bar{5}\times0+1+\bar{1}$	$\bar{5}\times1+\bar{3}$	$\bar{5}\times6+7$	$\bar{5}\times\bar{1}+1$	$\bar{5}\times1+1+3$	$\bar{5}\times\bar{1}+\bar{2}+6$	$\bar{5}\times4+3$	4
द्वंद्वयोग	0	$\bar{1}\,0$	$\bar{3}\,1$	6	$\bar{1}$	11	$\bar{2}\,\bar{1}$	4
इकाई अंक	0	0	1	6	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	4
भागफल			1	5	7	0	7	4

संख्या 10713634 भाजक 51 से विभाजित होती है तथा भागफल 157074 है।

8.4 आनुरूप्येण + एकाधिकेन पूर्वेण विधि : (Anurupyena + Ekadhikena Purvena Method)

जब किसी भाजक में किसी अंक का गुणा करने पर भाजक का इकाई अंक सर्वोच्च अंक हो जाता है तो इस विधि का उपयोग किया जाता है। क्रियापद निम्नवत् है:–

"आनुरूप्येण" उपसूत्र से भाजक के इकाई अंक को सर्वोच्च अंक के रूप में रूपान्तरित किया जाता है। संक्रिया "एकाधिकेन पूर्वेण" विधि से की जाती है। भागफल के लिये प्राप्त भागफल में आनुरूप्येण अंक से गुणा करने पर अभीष्ट भागफल प्राप्त होता है। सामान्यतया सर्वोच्च स्थान पर उपाधार संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (3) विभाजनीयता का अध्यन करना ।

(य) X = 16, भाजक = 13, भाज्य = 106960

(र) X=8, भाज्य = 310053, भाजक = 13

(ल) X=16, भाज्य = FFA6AC, भाजक = 1555

हल: (य) X = 16, भाजक = 13, भाज्य = 106960,

प्राचल = 13 x 5 + 1 = 5F + 1 =60, अर्थात 6 है।

	1	0	6	9	6	0	
द्वंद्वयोग	39	29	56	2D	6	0	
	6	6	9	2	A	0	x 5
	20	0	D	D	2	0	

संख्या 106960, भाजक 13 से विभाजित है एवं भागफल DD20 है।

(र) X=8, भाज्य = 310053, भाजक = 13

प्राचल = 13×5+1 = 67+1=70 अर्थात 7, शून्यों की संख्या = 1,

	3	1	0	0	5	3
द्वंद्वयोग	13	11	11	21	32	3
	4	6	6	6	5	5 × 5
	30	2	2	1	4	1

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल 22141 है।

(ल) X=16, भाज्य = FFA6AC, भाजक = 1555

प्राचल =1555x3+1= 3FFF+1=4000 अर्थात 4, शून्यों की संख्या =3

	FFA	6AC
द्वंद्वयोग	2AAA	6AC
	555	954x3
	1000	BFC

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल BFC है ।

8.5 आनुरूप्येण + एकन्यूनेन पूर्वेण विधि :
(Anurupyene + Ekanyunena Purvena Method)

जब किसी भाजक में किसी अंक का गुणा करने पर भाजक का इकाई अंक 1 होता जाता है तो इस विधि का उपयोग किया जाता है। क्रियापद निम्नवत् है:–

''आनुरूप्येण'' उपसूत्र से भाजक को इकाई अंक 1 के रूप में रूपान्तरित किया जाता है। संक्रिया ''एकन्यूनेन पूर्वेण'' विधि से की जाती है। भागफल के लिये प्राप्त भागफल में आनुरूप्येण अंक से गुणा करने पर अभीष्ट भागफल प्राप्त होता है। सामान्यतया सर्वोच्च स्थान पर उपाधार संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण (4) विभाजनीयता का अध्ययन करना।

(अ) X =16, भाज्य = 171369, भाजक = 1B

(ब) X=8, भाज्य = 310053, भाजक = 13

(स) X = 8, भाजक=23, भाज्य =4075276

हलः (अ) X = 16,भाज्य = 171369 ,भाजक = 1 B ,

प्राचल= 1Bx 3 –1 = 51-1 = 50 अर्थात $\overline{5}$

1	7	1	3	6	9
$\overline{2}\,\overline{6}$	B	$\overline{1}\,\overline{1}$	24	$\overline{2}\,\overline{7}$	9
$\overline{6}$	B	$\overline{1}$	4	$\overline{7}$	9 × 3
$\boxed{\overline{1}\,\overline{0}}$	1	$\overline{3}$	B	$\overline{4}$	B
	0	D	A	C	B

संख्या विभाजित होती है एवं भागफल DACB है।

(ब) X=8, भाज्य = 310053, भाजक = 13, प्राचल = 13×3-1 = 41-1 =40 अर्थात $\overline{4}$

शून्यों की संख्या = 1

	3	1	0	0	5	3
द्वंद्वयोग	$\overline{1}\,\overline{3}$	24	$\overline{1}\,\overline{5}$	34	$\overline{7}$	3
	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$	4	$\overline{7}$	3 × 3
	$\overline{1}0$	3	$\overline{6}$	2	$\overline{4}$	1
भागफल		2	2	1	4	1

(स) X = 8, भाजक=23, भाज्य =4075276, प्राचल = 23×3-1=70 अर्थात $\overline{7}$ है।

संख्या	4	0	7	5	2	7	6
द्वंद्वयोग	$\overline{46}$	6	60	$\overline{1}\,\overline{6}$	23	$\overline{43}$	6
भागफल	$\overline{6}$	6	0	$\overline{6}$	3	$\overline{3}$	6×3
अभीष्टभागफल	20	2	$\overline{2}$	$\overline{1}$	1	$\overline{7}$	2
		1	5	7	0	1	2

संख्या 4075276 भाजक 23 से विभाजित होती है तथा भागफल 1570132 है।

8.6 निष्कर्ष (Conclusion) :

पूर्वोक्त प्रकरणों से स्पष्ट है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के उपयोग से संख्याओं की विभाजनीयता ज्ञात करने में बहुत सरलता होती है। यह ज्ञात होने पर कि संख्या दिये गये भाजक से पूर्णता विभाजित है, भागफल भी आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। यह सूत्र गणनाओं के लिये सहज एवं सशक्त विकल्प प्रस्तुत करते हैं। सर्वथा प्रयुक्त परीक्षण पद्धति के कारण गणनाओं में रोचकता बढ़ जाती है।

8.7 संदर्भ ग्रन्थ (References):

{1} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{2} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{3} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{4} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya book depot, New Delhi (1994)

{5} T.S. Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{6} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{7} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp. 17-19.

{8} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।

{9} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{10} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{11} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{12} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{13} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिकगणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।

{14} Kailash, Program for Recurring Decimals, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 73-74.

{15} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।

{16} A. K.Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण

पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{17} Kailash & L. P. Vishwakarma, Concept of Boudhayan Numbers(Part I), Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 26, 2006, pp. 16-32.

{18} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

{19} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{20} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

अध्याय नौ

आवर्त दशमलव
(Recurring Decimals)

प्रकाशन (Publications)

- संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
- Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.
- Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 2006, pp. 342-351.

प्रयुक्त सूत्र एवं उपसूत्र

निखिलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परावर्त्य योजयेत्, उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, आनुरूप्येण, यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् एवं विलोकनम्।

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

9.2 हर का इकाई अंक 1 हो (If Last Digit of Denominator is One)

9.3 हर का इकाई अंक सर्वोच्च अंक हो

(If last Digit of Denominator is Highest Digit)

9.4 हर का इकाई अंक अन्य अंक हो

(If Last Digit of Denominator is Any Other Digit)

9.5 निष्कर्ष (Conclusion)

9.6 संदर्भ ग्रन्थ (References)

9.1 प्रस्तावना (Introduction) :

ऐसी भिन्न संख्यायें जिनका हर किसी विषम संख्या का गुणज होता है तथा भाग की संक्रिया करने पर भागफल में एक ही अंक या अंक समूह की पुनरावृत्ति होती है, आवर्ती संख्याओं के नाम से जानी जाती है। प्रस्तुत अध्याय के अन्तर्गत विभिन्न अंक प्रणालियों में संख्याओं के आवर्त दशमलव की विवेचना वैदिक गणित की तीन विधियों द्वारा की गई है। षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, 8F, 9F, AF, BF, CF, DF, EF एवं 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, A1, B1, C1, D1, E1 एवं F1 का सभी संभव अंशों (भाजकों से कम) पर आवर्त दशमलव की गणनायें की गई हैं। यहाँ वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों निखलं नवतः चरमं दशतः, एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, विलोकनम् एवं आनुरूप्येण आदि का उपयोग आवर्त दशमलव ज्ञात {1–8} करने में किया गया है।

9.2 हर का इकाई अंक सर्वोच्च अंक हो :
(If Last Digit of Denominator is Highest Digit)

हर का इकाई अंक सर्वोच्च अंक होने पर एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करके प्राचल ज्ञात {9–12} किया जाता है। इस विधि की उपपत्ति {2} परिशिष्ट 5(क) में दी गई है।

उदाहरण (1) आवर्त दशमलव ज्ञात करना।

(च) X= 16, भिन्न =12/1F (छ) X=16, भिन्न = 22/1FF

(ज) X=2, भिन्न =111/11111

हलः (च) X= 16, भिन्न = 12/1F, प्राचल = 1F +1 =20, अर्थात 2

शून्यों की संख्या = 1, दाया अंक = $_{1}2$

$12/1F = 0.\ 9\ \ _{1}4\ \ A\ \ 5\ \ _{1}2$

$= 0.\dot{9}94A5\dot{2}$

(छ) X=16, भिन्न = 22/1FF, प्राचल =1FF +1 =200, अर्थात 2

शून्यों की संख्या = 2, दाया अंक = 22

$22/1FF = 0.\ 11\ \ _{1}08\ \ 84\ \ 42\ \ 21\ \ _{1}10\ \ 88\ \ 44\ \ 22$

$= 0.\dot{1}108844 2 \dot{2}\ 1108844422$

$= 0.\dot{1}1088442\dot{2}$

(ज) X=2, भिन्न =111/11111, योग = 11111+1 = 100000, प्राचल = 1

शून्यों की संख्या= 5, दायाँ भाग = 00111

$111/11111 = 0.\dot{0}011\dot{1}$

षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, 8F, 9F, AF, BF, CF, DF एवं EF का सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना नीचे सारणियों में दी गयी है।

$1/1F = 0._{1}08421 = 0.\dot{0}842\dot{1}$. $2/1F = 0.1_{1}0842 = 0.\dot{1}084\dot{2}$. $4/1F = 0.21_{1}084 = 0.\dot{2}108\dot{4}$

$8/1F = 0.421_{1}08 = 0.\dot{4}210\dot{8}$. $10/1F = 0.8421_{1}0 = 0.\dot{8}421\dot{0}$

ऊपर की गयी व्याख्या से स्पष्ट है भाजक 1F के लिए के अंशों 2, 4, 8 एवं 10 पर आवर्त दशमलव के प्रारम्भिक अंक 1, 2, 4 एवं 8 हैं। परिणामों से स्पष्ट है कि इन अंशों यथा 2, 4, 8 एवं 10 पर आवर्त दशमलवों के अंक 1/1F के आवर्त दशमलव के अंक हैं, केवल प्रारम्भिक अंक बदल जाते हैं। अतः नीचे दी गयी सारणियों 1(i)-1(vi) में प्रारम्भिक अंक देकर भाजक 1F के लिए आवर्त दशमलव को संक्षिप्त किया गया है। इसी प्रकार भाजकों 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, 8F, 9F, AF, BF, CF, DF, EF विभिन्न अंशों पर आवर्त दशमलवों को नीचे दी गयी सारणियों 2-16 में संक्षिप्त किया है। यहाँ N - अंश, D - हर, R.D - आवर्त दशमलव एवं R.N- आवर्त दशमलव में अंकों की संख्या, को व्यक्त करता है।

भाजक 1F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 1

(i)		(ii)		(iii)		(iv)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 2,4,8,10	0.08421 1,2,4,8	3 6,C,11,18	0.18C63 3,6,8,C	5 9, A ,12,14,	0.294A5 4,5,9,A	7 E,19,1C,13	0.39CE7 7,C,E,9

(v)		(vi)	
N	R.D	N	R.D
F 17,1B,1D,1E,	0.7BDEF B,D,E,F	B D,15,16,1A	0.5AD6B 6,A,B,D

भाजक 2F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 2

N	R.D
1 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,C,E,10,11,12,15,18, 19,1B,1C,20,22,24,25,2A	0.0572620AE4C415C9882B9 31 0A,10, 15,20, 26, 2B, 31,41,4C,57,5C,62,72,82, 88,93, 98,AE,B9,C4,C9,E4

सारणी 3

N	R.D
5 A, B,D, F,13,14, 16,17,1A,1D,1E,1F,21,23, 26,27,28,29,2B,2C,2D,2E	0.1B3BEA3677D46CEFA8D9DF5 36,3B,46, 51, 67,6C, 77, 7D, 8D,9D,A3,A8, B3,BE, CE,D4,D9,DF,EA,EF,F5,FA

भाजक 3F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 4

(i)		(ii)		(iii)		(iv)		(v)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 4,10	0.041 1,4	2 8,20	0.082 2,8,	3 C,30	0.0C3 3,C	5 11,14	0.145 4,5	9 12,24	0.249 4,9

(vi) N	(vi) R.D	(vii) N	(vii) R.D	(viii) N	(viii) R.D	(ix) N	(ix) R.D	(x) N	(x) R.D
D 13,34	0.34D 4,D	16 19,25	0.594 6,9	6 18,21	0.186 6,8	7 1C,31	0.1C7 7,C	17 1D,35	0.5D7 7,D

(xi) N	(xi) R.D	(xii) N	(xii) R.D	xiii) N	xiii) R.D	(xiv) N	(xiv) R.D	(xv) N	(xv) R.D
A 22,28	0.28A 8,A	E 23,28	0.38E 8,E,	1A 26,29	0.69A 9,A	1E 27,39	0.79E 9,E	B 2C,32	0.2CB B,C

(xvi) N	(xvi) R.D	(xvii) N	(xvii) R.D	(xviii) N	(xviii) R.D	(xix) N	(xix) R.D	(xx) N	(xx) R.D
1B 2D,36	0.6DB B,D	F 33,3C	0.3CF C,F	1F 37,3D	0.7DF D,F	2F 3D,3E	0.BEF E,F	2B, 2E,3A	0.AEB B,E

सारणी 5

N	R.D
15,2A	0.5,0.A

भाजक 4F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 6

N	R.D
1 2,4,5,8,9,A,B,D,10,12,13,14,15,16,17,19,1A 1F,20,24,26,28,2A,2C,2D,2E,31,32,33,34,37, 3E,40,41,43,48,49,4C	0.033D91D2A2067B23A5440CF6474A8819EC8E951 06,0C,10,19,1D,20,23,2A,33,3A,3D,40,44,47,4A,51,54, 64,67,74,7B,81,88,8E,91,95,9E,A2,A5,A8,B2, C8,CF,D2,D9, E9,EC,F6

सारणी 7

N	R.D
3 6,7,C,E,F,11,18,1B,1C,1D,1E,21,22,23,25, 27,29,2B,2F,30,35,36,38,39,3A,3B,3C,3D,3F, 42,44,45,46,47,4A,4B,4D,4E	0.09B8B577E613716AEFCC26E2D5DF984DC5ABBF3 13,16,26,2D,30,37,4D,57,5A,5D,61,6A,6E,71,77, 7E,84,8B,98,9B,AB,AE,B5,B8, BB, BF, C2, C5,CC, D5, DC, DF, E2,E6, EF, F3, F9, FC

भाजक 5F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 8

(i) N	(i) R.D	(ii) N	(ii) R.D	(iii) N	(iii) R.D
1 6,B,10,1A,24, 3D,42,51	0.02B1DA461 10,1D,2B,46,61, A4,B1,DA	2 C,16,1B,20,25, 34,43,48	0.0563B48C2 20,3B,48,56,63, 8C,B4,C2	3 8,D,12,21,30, 35,4E,58	0.081D8ED23 15,23,30,58,81, 8E,D2,ED

(iv) N	(iv) R.D	(v) N	(v) R.D	(vi) N	(vi) R.D
4 9,18,27,2C,31, 36,40,4A	0.0AC769184 18,40,69,76,84, 91,AC,C7	5 14,19,1E,23,2D, 37,50,55	0.0D79435E5 35,43,50,5E,79, 94,D7,E5	7 11,2A,2F,3E,4D, 52,57,5C	0.12DCF7EA7 2D,71,7E,A7,CF, DC,EA,F7

(vii) N	(vii) R.D	(viii) N	(viii) R.D	(ix) N	(ix) R.D
A F,28,32,3C,41, 46,4B,5A	0.1AF286BCA 28,6B,86,A1,AF, BC,CA,F2	E 1D,22,3B,45,4F, 54,59,5E	0.25B9EFD4E 4E,5B,9E,B9,D4, E2,EF,FD	15 1F,29,2E,33,38, 47,56,5B	0.3896E7BF5 53,6E,7B,89,96, BF,E7,F5

(x) N	(x) R.D
17 1C,2B,3A,3F,44,49,53,5D	0.3DFA9C4B7 4B,73,9C,A9,B7,C4,DF,FA

सारणी 9

N	R.D
13,26,39,4C	0.3,0.6,0.9,0.C

भाजक 6F के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 10

(i)		(ii)		(iii)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 7,A,10,22,2E, 31,46,64	0.024E6A171 10,17,24,4E,6A, 71,A1,E6	2 E,14,1D,20,44, 59,5C,62	0.049CD42E2 20,2E,42,49,9C, CD,D4,E2	3 15,1B,1E,24, 30,4E,63,66	0.06EB3E453 30,3E,45,53,6E, B3,E4,EB

(iv)		(v)		(vi)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
4 16,1C,28,3A,40, 43,49,55	0.0939A85C4 39,40,5C,85,93, 9A,A8,C4	5 8,11,17,23,32, 38,3B,50	0.0B8812735 12,27,35,50,73, 81,88,B8	6 2A,2D,36,3C,48, 57,5D,60	0.0DD67C8A6 60,67,7C,8A,A6, C8,D6,DD

(vii)		(viii)		(ix)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
9 C,21,3F,4B,51, 54,5A,6C	0.14C1BACF9 1B,4C,91,AC,BA, C1,CF,F9	B 29,3E,41,4D,5F, 65,68,6E	0.195E8EFDB 5E,8E,95,B1,DB, E8,EF,FD	D 13,16,2B,4F,52, 5B,61,6D	0.1DFB632BD 2B,32,63,B6,BD, D1,DF,FB

(x)		(xi)		(xii)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
F 12,18,27,33,39, 42,45,69	0.229837595 29,37,59,75,83, 98,9F,F2	1A 26,2C,2F,35,47, 53,56,6B	0.3BF6C657A 57,65,6C,7A,A3, BF,C6,F6	1F 34,37,3D,4C,58, 5E,67,6A	0.477ED8CAF 77,7E,8C,AF,CA, D8,ED,F4

सारणी 11

N	R.D
25,4A	0.5,0.A

भाजकों 7F,8F,9F,AF,CF,DF के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 12

S.N	D	N	R.D	RN
1	7F	1,3,5,7,9,B D,F,13,15,17,1B1D,1F, 2B,2F,37,3F	0.0204081, 0.060C183, 0.0A14285, 0.0E1C387, 0.1224489, 0.162C58B, 0.1A3468D, 0.1E3C78F, 0.264C993, 0.2A54A95, 0.2E5CB97, 0.366CD9B, 0.3A74E9D,0.3E7CF9F,0.56AD5AB, 0.5EBD7AF, 0.6EDDBB7, 0.7EFDFBF	7
2	8F	1,2,7	0.01CA4B3055EE191, 0.03949660ABDC322, 0.0C880E525982AF7	
		A,4,5	0.11E6EFE35B4CFAA, 0.07292CC157B8644, 0.08F377F1ADA67D5	15
		14,1D; D,1A	0.23CDDFC6B699F54, 0.33EA8479BBF8D6D; 0.1745D, 0.2E8BA	15, 5
		B,16,2C,4D	0.13B, 0.276, 0.4EC, 0.89D	3
3	9F	1,2,3	0.019C2D14EE4A1, 0.03385A29DC942, 0.04D4873ECADE3	13
		4,5,6	0.0670B453B9284, 0.080CE168A7725, 0.09A90E7D95BC6	
		B,C,F	0.11B5EFE63D2EB, 0.13521CFB2B78C, 0.1826A439F656F	
		13,16,2C; 35,6A	0.1E97588DAF7F3, 0.236BDFCC7A5D6, 0.46D7BF98F4BAC; 0.5,0.A	13,1
4	AF	1,2,3	0.01767DCE434A9B1, 0.02ECFB9C8695362, 0.0463796AC9DFD13	15
		4,6,8	0.05D9F7390D2A6C4, 0.08C6F2D593BFA26, 0.0BB3EE721A54D88	
		C,13	0.118DE5AB277F44C, 0.1BCB564EFE89823	
		7,E,15,1C	0.0A3D7, 0.147AE, 0.1EB85, 0.28F5C	5
		5,A,F,14,19,1E	0.075, 0.0EA, 0.15F, 0.1D4, 0.249, 0.2BE,	
		28,3C,4B,5F	0.3A8, 0.57C, 0.6DB, 0.8AF	
		23,46,69,8C	0.3,0.6,0.9,0.C	1
5	CF	1,	0.013C995A47BABE74404F265691EEAF9D1,	33
		2,	0.027932B48F757CE8809E4CAD23DD5F3A2,	
		5,	0.062EFEC366A5B845418BBFB0D9A96E115	
		7	0.08A83177F61B352DC22A0C5DFD86CD4B7	
		3,6,9	0.03B5CC0ED73, 0.076B981DAE6, 0.0B21642C859	11
		F,15,2D	0.128CFC4A33F, 0.37A6F4DE9BD, 0.37A6F4DE9BD	
		17,2E	0.1C7, 0.38E	3
		45,8A	0.5,0.A	1
6	DF	1	0.0125E22708092F113840497889C2024BC44E1	37
		3	0.0371A675181B8D33A8C0DC699D4606E34CEA3	
		5	0.05BD6AC3282DEB5619416F5AB0CA0B7AD5865	
		9	0.0A54F35F4852A79AFA42953CD7D214A9E6BE9	
		D	0.0EEC7BFB687763DFDB43BB1EFEDA1DD8F7F6D	
		13	0.15CFC8E598AE7E472CC573F239662B9F91CB3	

$1/BF=0.\ {}_{1}0\ {}_{4}1\ {}_{5}5\ {}_{1}7\ {}_{B}1\ {}_{9}E\ {}_{2}D\ {}_{9}3\ {}_{3}C\ 5\ {}_{5}0\ {}_{8}6\ {}_{2}B\ {}_{7}3\ {}_{7}9\ {}_{1}A\ {}_{2}2\ {}_{A}2\ {}_{6}D\ {}_{1}9\ {}_{1}2\ {}_{6}1\ {}_{1}8\ 2\ {}_{2}0\ {}_{8}2\ {}_{A}A\ {}_{2}E\ {}_{A}3\ {}_{7}D\ {}_{5}A\ {}_{6}7\ {}_{7}8\ A\ {}_{A}0\ {}_{4}D\ {}_{5}6\ {}_{2}7\ {}_{3}3\ {}_{3}4\ {}_{4}4\ {}_{8}5\ {}_{1}B\ {}_{3}2$
${}_{2}4\ 3\ {}_{3}0\ 4\ {}_{4}0\ {}_{4}5\ {}_{9}5\ {}_{5}C\ {}_{8}7\ {}_{3}B\ {}_{B}4\ F\ {}_{3}1\ {}_{1}4\ {}_{8}1\ {}_{9}A\ {}_{A}C\ {}_{4}E\ {}_{6}6\ {}_{6}8\ {}_{8}8\ {}_{4}B\ {}_{3}6\ {}_{6}4\ {}_{4}8\ 6\ {}_{6}0\ 8\ {}_{8}0\ {}_{8}A\ {}_{6}B\ {}_{B}8\ {}_{4}F\ {}_{7}6\ {}_{A}9\ {}_{1}E\ {}_{6}2\ {}_{2}8\ {}_{4}3\ {}_{7}5\ {}_{9}9\ {}_{9}C\ D\ {}_{1}1\ {}_{5}1\ {}_{9}6\ {}_{6}C\ 9\ {}_{9}0\ C\ 1$
1/BF=0.01571ED3C506B39A22D9218202AE3DA78A0D673445B24304055C7B4F141ACE688B6486080AB8F69E
28359CD116C90C1

इसी प्रकार

2/BF=0.02A…182,3/BF= =0.040…243.

भाजक BF के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 13

N	R.D
1	0.01571ED3C506B39A22D9218202AE3DA78A0D673445B2430 4055C7B4F141ACE688B6486080AB8F69E28359CD116C90C1
2,3,4,5,6,8,9,A,C,D,F,10,11,12, 14,17,18,19,1A,1B,1E,20,22,24,27,28,2B,2D, 2E,30,31,32,33,34,36,3B,3C,40,41,43,44,45, 48,4B,4D,4E,4F,50,51,55,56,5A,5C,60,61,62, 64,66,67,68,6B,6C,6D,73,75,76,78,79,7D,80, 81,82,85,86,87,88,8A,90,93,95,96,99,9A,9C, 9E,A0,A2,A3,A9,AA,AC,B1,B4,B8	02A,040,055,06B,080,0AB,0C1,0D6,101,116,141,157,16C,182, 1AC,1ED,202,218,22D,243,283,2AE,2D9,304,344,359,39A,3C5, 3DA,405,41A,430,445,45B,486,4F1,506,55C,571,59C,5B2,5C7, 608,648,673,688,69E,6B3,6C9,71E,734,78A,7B4,80A,820,835, 860,88B,8A0,8B6,8F6,90C,921,9A2,9CD,9E2,A0D,A22,A78,AB8, ACE,AE3,B24,B39,B4F,B64,B8F,C10,C50,C7B,C90,CD1,CE6,D11, D3C,D67,D92,DA7,E28,E3D,E68,ED3,F14,F69

सारणी 14

N	R.D
7 B,E,13,15,16,1C,1D,1F,21,23,25,26,29,2A, 2C,2F,35,37,38,39,3A,3D,3E,3F,42,46,47,49, 4A,4C,52,53,54,57,58,59,5B,5D,5E,5F,63,65, 69,6A,6E,6F,70,71,72,74,77,7A,7B,7C,7E,7F, 83,84,89,8B,8C,8D,8E,8F,91,92,94,97,98,9B, 9D,9F,A1,A4,A5,A6,A7,A8,AB,AD,AE,AF,B0,B2, B3,B5,B6,B7,B9,BA,BB,BC,BD,BE,	0.0961D7CA632EE936F3EFEA8E12C3AF94C65DD26DE7DFD51C2 5875F298CBBA4DBCFBFAA384B0EBE53197749B79F7F547 0EB,12C,197,1C2,1D7,258,26D,298,2C3,2EE,319,32E,36F,384, 3AF,3EF,470,49B,4B0,4C6,4DB,51C,531,547,587,5DD,5F2,61D, 632,65D,6DE,6F3,709,749,75F,774,79F,7CA,7DF,7F5,84B,875, 8CB,8E1,936,94C,961,977,98C,9B7,9F7,A38,A4D,A63,A8E,AA3, AF9,B0E,B79,BA4,BBA,BCF,BE5,BFA,C25,C3A,C65,CA6,CBB,CFB, D26,D51,D7C,DBC,DD2,DE7,DFD,E12,E53,E7D,E93,E7D,EBE,EE9, EFE,F29,F3E,F54,F7F,F94,FAA,FBF,FD5,FEA

भाजक EF के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 15

N	R.D
1	0.0112358E75D30336A0AB617909A3E202246B1CEBA6066D41 56C2F21347C40448D639D74C0CDA82AD85E4268F880891AC7 3AE9819B5055B0BC84D1F1
2,3,4,5,6,8,9,A,B,C,F,10,11,12	022,033,044,055,066,089,09A,0AB,0BC,0CD,011,112,123,134,
14,16,18,19,1B,1D,1E,1F,20,21,22,24,28,2C	156,179,19B,1AC,1CE,1F1,202,213,224,235,246,268,2AD,2F2
2D,30,31,32,33,36,37,3A,3C,3D,3E,40,42,43	303,336,347,358,36A,39D,3AE,3E2,404,415,426,448,46B,47C
44,47,48,4B,50,51,53,55,57,58,5A,5B,5D,60	48D,4C0,4D1,505,55B,56C,58E,5B0,5D3,5E4,606,617,639,66D
62,63,64,65,66,6C,6D,6E,71,74,78,79,7A,7C	68F,6A0,6B1,6C2,6D4,73A,74C,75D,790,7C4,808,819,82A,84D
7D,7F,80,84,85,86,87,88,8E,90,91,93,96,99	85E,880,891,8D6,8E7,8F8,909,91A,981,9A3,9B5,9D7,A0A,A3E
9B,9D,A0,A1,A2,A3,A5,A6,A9,AA,AE,B0,B4,B6	A60,A82,AB6,AC7,AD8,AE9,B0B,B1C,B50,B61,BA6,BC8,C0C,C2F
B7,BA,BB,C0,C1,C4,C5,C6,C8,C9,CA,CC,D3,D5	C40,C73,C84,CDA,CEB,D1F,D30,D41,D63,D74,D85,DA8,E20,E42
D8,DA,DC,E1,E2,E8	E75,E98,EBA,F10,F21,F88

सारणी 16

N	R.D
7	0.077F76E538C5167E64AFAA4F437B2E0EFEEDCA718A2CFCC9 5F549E86F65C1DFDDB94E31459F992BEA93D0DECB83BFBB729 C628B3F3257 D527A1BD97
D,E,13,15,17,1A,1C,23,25,26,27,29,2A,2B	0DE,0EF,145,167,18A,1BD,1DF,257,27A,28B,29C,2BE,2CF,1E0
2E,2F,34,35,38,39,3B,3F,41,45,46,49,4A,4C	314,325,37B,38C,3BF,3D0,3F3,437,459,49E,4AF,4E3,4F4,516
4D,4E,4F,52,54,56,59,5C,5E,5F,61,67,68,69	527,538,549,57D,59F,5C1,5F5,628,64A,65C,67E,6E5,6F6,707
6A,6B,6F,70,72,73,75,76,77,7B,7E,81,82,83	718,729,76E,77F,7A1,7B2,7D5,7E6,7F7,83B,86F,8A2,8B3,8C5
89,8A,8B,8C,8D,8F,92,94,95,97,98,9A,9C,9E, 9F,A4,A7,A8,AB,AC,AD,AF,B1,B2,B3,B5,B8,B9	92B,93D,94E,95F,970,992,9C6,9E8,9F9,A1B,A2C,A4F,A71,A93, AA4,AFA,B2E,B3F,B72,B83,B94,BB7,BD9,BEA,BFB,C1D,C51,C62
BC,BD,BE,BF,C2,C3,C7,CB,CD,CE,CF,D0,D1,D2	C95,CA7,CB8,CC9,CFC,D0D,D52,D97,DB9,DCA,DDB,DEC,DFD,E0E
D4,D6,D7,D9,DB,DD,DE,DF,E0,E3,E4,E5,E6,E7	E31,E53,E64,E86,EA9,ECB,EDC,EED,EFE,F32,F43,F54,F65,F76
E9,EA,EB,EC,ED,EE	E75,E98,EBA,F10,F21,F88

सारणी 1 से स्पष्ट है कि भाजक 1F के लिए, सभी संभव अंशों (भाजक से कम) में आवर्त दशमलव के मान 6 सैट में 5 अंकों में प्राप्त होते हैं। सारणी 1(i) से अंशों 2, 4, 8, 10 के आवर्त दशमलव, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 1, 2, 4, 8 हैं। सारणी 1(ii) से अंशों 6, C, 11, 18 के आवर्त दशमलव, अंश 3 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 3, 6, 8, C हैं। सारणी 1(iii) से अंशों 9, A, 12, 14 के आवर्त दशमलव, अंश 5 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 4, 5, 9, A हैं।

सारणी 1(iv) से अंशों E, 19, 1C, 13 के आवर्त दशमलव, अंश 7 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 7, C, E, 9 हैं। सारणी 1(v) से अंशों 17, 1B, 1D, 1E के आवर्त दशमलव, अंश F के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः B, D, E, F हैं। सारणी 1(vi) से अंशों D, 15, 16, 1A के आवर्त दशमलव, अंश B के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 6, A, B, D हैं। सारणी 2-3 से स्पष्ट है कि भाजक 2F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 2 सैट में 23 अंकों में प्राप्त होता है। सारणी 2 से कि अंशों 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, C, E, 10, 11, 12, 15, 18, 19, 1B, 1C, 20, 22, 24, 25, 2A के आवर्त दशमलव, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 3 से अंशों A, B, D, F, 13, 14, 16, 17, 1A, 1D, 1E, 1F, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 2B, 2C, 2D, 2E के आवर्त दशमल, अंश 5 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 4 से भाजक 3F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 15, 2A को छोड़कर, 20 सैट में 3 अंकों में प्राप्त होता है। अंशों 15, 2A के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं, जिन्हें सारणी 5 में दिया है। सारणी 6-7 से स्पष्ट है कि भाजक 4F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 2 सैट में 39 अंकों में प्राप्त होता है। सारणी 6 से अंशों 2, 4, 5, 8, 9, A, B, D, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 1A, 1F, 20, 24, 26, 28, 2A, 2C, 2D, 2E, 31, 32, 33, 34, 37, 3E, 40, 41, 43, 48, 49, 4C के आवर्त दशमल, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। 4C/4F के मान हेतु, सारणी 6 से देखने पर अंश 4C के आवर्त दशमलव का प्रारम्भिक अंक F6 है।

$1/4F=0.\dot{0}33D91D2A2067B23A5440CF6474A8819EC8E95\dot{1}$

अतः $4C/4F=0.\dot{F}6474A8819EC8E951033D91D2A2067B23A5440\dot{C}$ है। सारणी 7 से अंशों 6, 7, C, E, F, 11, 18, 1B, 1C, 1D, 1E, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 2B, 2F, 30, 35, 36, 38, 39, 3A, 3B, 3C, 3D, 3F, 42, 44, 45, 46, 47, 4A, 4B, 4D, 4E के आवर्त दशमल, अंश 3 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 8-9 से स्पष्ट है कि भाजक 5F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 13, 26, 39, 4C को छोड़कर, 10 सैट में 9 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 9 से अंशों 13, 26, 39, 4C के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.3, 0.6, 0.9, 0.C हैं। सारणी 8(i)-8(x) में 10 सैट (अंशों 1, 2, 3, 4, 5, 7, A, E, 15 एवं 17) के आवर्त दशमलव एवं प्रत्येक सैट के संगत 8 अंशों के आवर्त दशमलव के प्रारम्भिक अंक देकर संक्षिप्त किया गया है। सारणी 10-11 से स्पष्ट है कि भाजक 6F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 25, 4A को छोड़कर, 12 सैट में 9 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 11 से अंशों 25, 4A के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं।

सारणी 12 में भाजकों 7F, 8F, 9F, AF, CF, DF के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के कितने सैट बन सकते हैं, को दिया है। भाजक 7F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 18 सैट में 7 अंकों में प्राप्त होते है। भाजक 8F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 8 सैट 15 अंकों में, 2 सैट 5 अंकों में एवं 4 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते है। भाजक 9F के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 35, 6A को छोड़कर, 12 सैट 13 अंकों में प्राप्त होते है। अंशों 35, 6A के आवर्त दशमलव 1 अंक में प्राप्त होते हैं, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। भाजक AF के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 23, 46, 69, 8C को छोड़कर, 8 सैट 15 अंकों में, 4 सैट 5 अंकों में, 10 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते है। अंशों 23, 46, 69, 8C के आवर्त दशमलव 1 अंक में प्राप्त होते हैं,

जिनके मान क्रमशः 0.3, 0.6, 0.9. 0.C हैं। भाजक CF के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 45, 8A को छोड़कर, 4 सैट 33 अंकों में, 6 सैट 11 अंकों में, 2 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते है। अंशों 45, 8A के आवर्त दशमलव 1 अंक में प्राप्त होते हैं, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। भाजक DF के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 6 सैट में 37 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 13-14 से स्पष्ट है कि भाजक BF के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 2 सैट में 95 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 15-16 से स्पष्ट है कि भाजक EF के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 2 सैट में 119 अंकों में प्राप्त होते है।

9.3 हर का इकाई अंक 1 हो (If Last Digit of Denominator is One) :

हर का इकाई अंक 1 होने पर एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करके प्राचल ज्ञात {13–18} किया जाता है, यह ऋणात्मक होता है। इस विधि की उपपत्ति परिशिष्ट 5(ख) में दी गई है।

उदाहरण (2) आवर्त दशमलव ज्ञात करना।
(च) X = 16, भिन्न = 21/41 (छ) X = 16, भिन्न =123/201 (ज) X = 16,भिन्न = 17/51
हलः (च) X = 16, भिन्न =21/41, अंश =21, हर =41,
प्राचल = 41- 1 = 40 अर्थात $\bar{4}$,शून्यों की संख्या = 1,दायाँ भाग = ${}_{\bar{2}}\bar{1}$

द्वन्द्वयोग	$\bar{4}$ x 2	$\bar{4}$ x 0+2	$\bar{4}$ x $\bar{8}$	$\bar{4}$x2	$\bar{4}$ x $\bar{1}$ + $\bar{2}$	
	$\bar{8}$	2	20	$\bar{8}$	2	
	$\bar{8}$	2	${}_{2}0$	$\bar{8}$	2	${}_{\bar{2}}\bar{1}$

21/41 = $0.\bar{8}\,2\,0\,\bar{8}\,2\,\bar{1}$
= 0. 81 F 8 1 F
= $0.\dot{8}\,1\,\dot{F}$

(छ) X = 16, भिन्न =123/201, अन्तर = 201-1 =200, प्राचल = $\bar{2}$
शून्यों की संख्या = 2, दायाँ भाग = ${}_{\bar{1}}\overline{23}$

$123/201=0.\overline{7}\overline{1}\quad {}_{1}38\quad \overline{9}\overline{C}\quad 4E\quad \overline{27}\quad {}_{1}14\quad \overline{8}\overline{A}\quad 45\ {}_{\bar{1}}\overline{23}$

123/201 = 0.9137644DD 9137644DD = $0.\dot{9}137644\,D\dot{D}$

(ज) X = 16, भिन्न = 17/51
प्राचलक = 51 - 1 = 50 अर्थात $\bar{5}$
शून्यों की संख्या = 1 दायां अंक = ${}_{\bar{1}}\bar{7}$

$17/51=0.{}_{\bar{2}}\bar{C}\ \ {}_{1}9\ \ \bar{5}\ \ 1\ \ {}_{\bar{4}}\bar{1}\ \ D\ \ {}_{\bar{2}}\bar{3}\ \ 7\ \ {}_{\bar{3}}\bar{2}\ \ A\ \ \bar{2}\ \ {}_{3}1\ \ {}_{\bar{1}}\bar{A}\ \ {}_{4}6\ \ \bar{E}\ \ {}_{1}3\ \ {}_{\bar{1}}\bar{4}$

$4\ \ {}_{\bar{1}}\bar{1}\ \ {}_{3}4\ \ {}_{\bar{3}}\bar{B}\ \ {}_{1}C\ \ {}_{\bar{2}}\bar{6}\ \ {}_{2}8\ \ \bar{8}\ \ {}_{2}2\ \ {}_{\bar{1}}\bar{7}$

= $0.\dot{4}\,8B0FCD6E9E06522C3F35BA781\,\dot{9}$

षोडश अंकीय प्रणाली में हर 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, A1, B1, C1, D1, E1 एवं F1 का सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना नीचे सारणियों 17–34 में दी गयी है।

$1/11 = 0.1\overline{1} = 0.0\dot{F}$

भाजक 11 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 17

N	R.D
1,2,3,4,5,6,7,8,9,A, B,C,D,E,F,10	0.0F,0.1E,0.2D,0.3C,0.4B,0.5A,0.69,0.78,0.87,0.96, 0.A5,0.B4,0.C3,0.D2,0.E1,0.F0

भाजक 21 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 18

(i)		(ii)		(iii)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 4,10,19,1F	0.07C1F 1,7,C,F	2 8,11,1D,20	0.0F83E 3,8,E,F	3 9,C,F,1B	0.1745D 4,5,7,D

(iv)		(v)		(vi)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
5 E,14,17,1A	0.26C9B 6,9,B,C	6 12,15,18,1E	0.2E8BA 8,A,B,E	7 A,D,13,1C	0.364D9 4,6,9,D

सारणी 19

N	R.D
B,16	0.5,0.A

भाजक 31 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 20

(i)

N	R.D
1 2,4,8,9,B,F,10,12,16,17,19,1D,1E,20, 24,25,27,2B,2C,2E	0.05397829CBC14E5E0A72F 0A,14,29,2F,39,4E,53,5E,72,78,82,97,9C,A7, BC,C1,CB,E0,E5,F0

(ii)

N	R.D
3 5,6,A,C,D,11,13,14,18,1A,1B,1F,21,22, 26,28,29,2D,2F,30	0.0FAC687D6343EB1A1F58D 1A,1F,34,3E,43,58,63,68,7D,87,8D,A1,AC,B1, C6,D0,D6,EB,F5,FA

सारणी 21

(i)		(ii)	
N	R.D	N	R.D
7 E,1C	0.249 4,9	15 23,2A	0.6DB B,D

भाजक 41 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 22

N	R.D
D,1A,27,34	0.3, 0.6, 0.9, 0.C

1/41=0.03F, N/41=N X 0.03F where N=1,2,3………40 except N= D,1A,27,34

भाजक 51 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 23

(i)

N	R.D
1 4,7,A,D,10,13,16,19,1C,1F,22,25,28,2B,2E, 31,34,37,3A,3D,40,43,46,49,4C,4F	0.0329161F9ADD3C0CA4587E6B74F 0C,16,1F,29,32,3C,45,4F,58,61,6B,74,7E,87,91, 9A,A4,AD,B7,C0,CA,D3,DD,E6,F0,F9

(ii)

N	R.D
2 5,8,B,E,11,14,17,1A,1D,20,23,26,29,2C,2F, 32,35,38,3B,3E,41,44,47,4A,4D,50	0.06522C3F35BA781948B0FCD6E9E 0F,19,22,2C,35,3F,48,52,5B,65,6E,78,81,8B,94, 9E,A7,B0,BA,C3,CD,D6,E0,E9,F3,FC

सारणी 24

(i)		(ii)	
N	R.D	N	R.D
3 C,15,1E,27,30,39,42,4B	0.097B425ED 25,42,5E,7B,97,B4,D0,ED	6 F,18,21,2A,33,3C,45,4E	0.12F684BDA 2F,4B,68,84,A1,BD,DA,F6

सारणी 25,26

N	R.D	N	R.D
9 24,3F	0.1C7 7,C	12 2D,48	0.38E 8,E

N	R.D
1B,36	0.5,0.A

भाजक 61 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 27

(i), (ii), (iii)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 6,10,16,23,24,3D, 3E,4B,51,5B,60	0.02A3A0FD5C5F 0F,2A,3A,5C,5F,A0, A3,C5,D5,F0,FD	2 C,19,1B,20,2C,35, 41,46,48,55,5F	0.07EAE2F8151D 15,1D,2F,51,7E,81, AE,D0,E2,EA,F8	3 8,B,12,1F,30,31, 42,4F,56,59,5E	0.07EAE2F8151D 15,1D,2F,51,7E,81, AE,D0,E2,EA,F8

(iv), (v), (vi)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
4 9,18,21,2B,2F,32, 36,40,49,58,5D	0.08E83F5717C 17,3F,57,71,7C,83, 8E,A8,C0,E8,F5	5 D,E,11,13,1E,43, 4E,50,53,54,5C	0.0D3224F2CDDB 22,24,2C,32,4F,B0, CD,D3,DB,DD,F2	7 F,27,28,2A,2E,33, 37,39,3A,52,5A	0.127966ED8699 27,66,69,6E,79,86, 91,96,99,D8,ED

(vii), (viii)

N	R.D	N	R.D
A. 1A,1C,22,25,26,3B, 3C,3F,45,47,57	0.1A6449E59BB6 44,49,59,61,64,9B, 9E,A6,B6,BB,E5	14 15,17,1D,29,2D,34, 38,44,4A,4C,4D	0.34C893CB376C 37,3C,4C,6C,76,89, 93,B3,C3,C8,CB

भाजक 71 के लिए आवर्त दशमलव –

$1/71=0._{\bar{1}}0_5 3_{\bar{1}}\bar{C}4_{\bar{3}}\bar{1}7\bar{1}$, $2/71=0._{\bar{2}}0_3 5_{\bar{3}}\bar{8}8_{\bar{6}}\bar{2}E\bar{2}$

$=0.03\bar{C}4\bar{1}7\bar{1} = 0.\dot{0}243F6\dot{F}$ $= 0.05\bar{8}8\bar{2}E\bar{2} = 0.\dot{0}487ED\dot{E}$

सारणी 28

(i), (ii)

N	R.D	N	R.D
1 10,1C,1E,31,6A,6D	0.0243F6F 24,3F,43,6F,F0,F6	2 20,38,3C,62,63,69	0.0487EDE 48,7E,87,DE,E0,ED

(iii), (iv)

N	R.D	N	R.D
3 22,30,54,5A,5C,65	0.06CBE4D 4D,6C,BE,CB,D0,E4	4 7,40,53,55,61,70	0.090FDBC 0F,90,BC,C0,DB,FD

(v), (vi)

N	R.D	N	R.D
5 13,1B,25,4E,50,5D,	0.0B53D2B 2B,3D,53,B0,B5,D2	6 37,43,44,47,55,60	0.0D97C9A 7C,97,9A,A0,C9,D9

(vii), (viii)

N	R.D	N	R.D
8 E,F,35,39,51,6F	0.121FB78 1F,21,78,81,B7,FB	A 26,2B,2F,36,49,4A	0.16A7A56 56,61,6A,7A,A5,A7

(ix), (x)

N	R.D	N	R.D
C 15,17,1D,41,4F,6E	0.1B2F934 2F,34,41,93,B2,F9	11 18,2A,2D,2E,3A,6B	0.268365F 36,5F,65,68,83,F2

(xi), (xii)

N	R.D	N	R.D
14 21,23,4C,56,5E,6C	0.2D4F4AC 4A,4F,AC,C2,D4,F4	9 1A,1F,2C,32,4D,66	0.1463AE7 3A,46,63,71,AE,E7

(xiii), (xiv)

N	R.D	N	R.D
B 24,3F,45,52,57,68	0.18EB9C5 51,8E,9C,B9,C5,EB	D 16,19,33,3D,48,5F	0.1D738A3 31,38,73,8A,A3,D7

(xv), (xvi)

N	R.D	N	R.D
12 29,34,3E,58,5B,64	0.28C75CE 5C,75,8C,C7,CE,E2	27 28,3B,42,46,4B,67	0.585A9E9 5A,89,95,9E,A9,E9

भाजकों 81, 91, A1, B1, C1, D1 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 29

S.NO	D	N	R.D	RN
	81	1,2,3,5,6,7	0.01FC07F,0.03F80FE,0.05F417D,0.09EC27B, 0.0BE82FA, 0.0DE4379	7
		9,A,B,D,E,12	0.11DC477,0.13D84F6,0.15D4575, 0.19CC673, 0.1BC86F2, 0.23B88EE	
		13,15,16,17,1A,1B	0.25B496D, 0.29ACA6B, 0.2BA8AEA, 0.2DA4B69,0.3398CE6, 0.3594D65	
		2B,56	0.5, 0.A	1
2	91	1,2,3,4,5,6	0.01C3F8F, 0.0387F1E, 0.054BEAD, 0.070FE2C, 0.08D3DCB, 0.0A97D5A	7
		7,8,A,B,C,D	0.0C5BCE9, 0.0E1FC78, 0.11A7B96, 0.136BB25, 0.152FAB4, 0.16F3A43	
		E,14,16,17,18,1A	0.18B79D2, 0.234F72C, 0.26D764A, 0.289B5D9, 0.2A5F568, 0.2DE7486	
		27,28	0.44DAEC9, 0.469EE58	
		1D,3A,57,74	0.3,0.6,0.9,0.C	
3	A1	1	0.01970E4F80CB8727C065C393E032E1C9F	33
		3	0.04C52AEE8262957741314ABBA098A55DD	
		5	0.07F3478D83F9A3C6C1FCD1E360FE68F1B	
		B	0.117D9D6A88BECEB5445F675AA22FB3AD5	
		7,23; 17,45	0.0B21642C859, 0.37A6F4DE9BD; 0.249, 0.6DB	11;3
4	B1	1,2	0.01724287F46DEBC05C90A1FD1B7AF,0.02E4850FE8DBD780B92143FA36F5E	29
		3,6	0.0456C797DD49C34115B1E5F75270D,0.08AD8F2FBA9386822B63CBEEA4E1A	
		5,A	0.073B4CA7C6259AC1CED329F18966B, 0.0E76994F8C4B35839DA653E312CD6	
		3B,76	0.5,0.A	1
5	C1	1,2	0.015390948F40FEAC6F6B70BF, 0.02A721291E81FD58DED6E17E	24
		3,5	0.03FAB1BDADC2FC054E42523D, 0.06A1D2E6CC44F95E2D1933BB	
		6,A	0.07F5637B5B85F80A9C84A47A, 0.0D43A5CD9889F2BC5A326776	
		B,D	0.0E97366227CAF168C99DD835, 0.113E578B464CEEC1A874B9B3	
6	D1	1	0.013991C2C187F63371E9F3C04E6470B061FD8CDC7A7CF	45
		2	0.02732385830FEC66E3D3E7809CC8E160C3FB19B8F4F9E	
		3	0.03ACB5484497E29A55BDDB40EB2D521125F8A6956F76D	
		6	0.07596A90892FC534AB7BB681D65AA4224BF14D2ADEEDA	
		B,16	0.0D79435E5, 0.1AF286BCA,	9
		13,26	0.1745D, 0.2E8BA	5

भाजक E1 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 30

(i) (ii)

N	R.D	N	R.D
1 10,1F,2E,3D,4C,5B,6A,79, 88,97,A6,B5,C4,D3	0.0123456789ABCDF 12,23,34,45,56,67,78,89, 9A,AB,BC,CD,DF,F0	2 11,20,2F,3E,4D,5C,6B,7A, 89,98,A7,B6,C5,D4	0.02468ACF13579BE 13,24,35,46,57,68,79,8A, 9B,AC,BE,CF,E0,F1

(iii) (iv)

N	R.D	N	R.D
4 13,22,31,40,4F,5E,6D,7C, 8B,9A,A9,B8,C7,D6	0.048D159E26AF37C 15,26,37,48,59,6A,7C,8D, 9E,AF,C0,D1,E2,F3	7 16,25,34,43,52,61,70,7F, 8E,9D,AC,BB,CA,D9	0.07F6E5D4C3B2A19 19,2A,3B,4C,5D,6E,7F,90, A1,B2,C3,D4,E5,F6

(v) (vi)

N	R.D	N	R.D
8 17,26,35,44,53,62,71,80, 8F,9E,AD,BC,CB,DA	0.091A2B3C4D5E6F8 1A,2B,3C,4D,5E,6F,80,91, A2,B3,C4,D5,E6,F8	B 1A,29,38,47,56,65,74,83, 92,A1,B0,BF,CE,DD	0.0C83FB72EA61D95 1D,2E,3F,50,61,72,83,95, A6,B7,C8,D9,EA,FB

(vii) (viii)

N	R.D	N	R.D
D 1C,2B,3A,49,58,67,76,85, 94,A3,B2,C1,D0,DF	0.0ECA8641FDB9753 1F,30,41,53,64,75,86,97, A8,B9,CA,DB,EC,FD	E 1D,2C,3B,4A,59,68,77,86, 95,A4,B3,C2,D1,E0	0.0FEDCBA98765432 20,32,43,54,65,76,87,98, A9,BA,CB,DC,ED,FE

सारणी 31

(i) (ii)

N	R.D	N	R.D
3 30,5D,8A,B7	0.0369D 36,69,9D,D0	6 33,60,8D,BA	0.06D3A 3A,6D,A0,D3

(iii) (iv)

N	R.D	N	R.D
9 36,63,90,BD	0.0A3D7 3D,70,A3,D7	12 3F,6C,99,C6	0.147AE 47,7A,AE,E1

(v) (vi)

N	R.D	N	R.D
15	0.17E4B	18	0.1B4E8

42,6F,9C,C9	4B,7E,B1,E4	45,72,9F,CC	4E,81,B4,E8

(vii) (viii)

N	R.D	N	R.D
C 39,66,93,C0	0.0DA74 40,74,A7,DA	21 4E,7B,A8,D5	0.258BF 58,8B,BF;F2

(ix) (x)

N	R.D	N	R.D
24 51,7E,AB,D8	0.28F5C 5C,8F,C2,F5	27 54,81,AE,DB	0.2C5F9 5F,92,C5,F9

(xi) (xii)

N	R.D	N	R.D
1B 48,75,A2,CF	0.1EB85 51,85,B8,EB	2A 57,84,B1,DE	0.2FC96 62,96,C9,FC

सारणी 32

(i) (ii)

N	R.D	N	R.D
5,50,9B	0.05B,0.5B0,0.B05	14,5F,AA	0.16C,0.6C1,0.C16

(iii) (iv)

N	R.D	N	R.D
A,55,A0	0.0B6,0.60B,0.B60	37,82,CD	0.3E9,0.93E,0.E93

(v) (vi)

N	R.D	N	R.D
46,91,DC	0.4FA,0.A4F,0.FA4	19,64,AF	0,1C7,0.71C,0.C71

(vii) (viii)

N	R.D	N	R.D
41,8C,D7	0.49F,0.9F4,0.F49	32,7D,C8	0.38E,0.8E3,0.E38

(ix) (x)

N	R.D	N	R.D
23,6E,B9	0.27D,0.7D2,0.D27	28,73,BE	0.2D8,0.82D,0.D82

सारणी 33

N	R.D
F,1E,2D,3C,4B,5A,69,78,87,96,A5,B4,C3,D2	0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,0.A,0.B,0.C,0.D,0.E

भाजक F1 के लिए आवर्त दशमलव –

सारणी 34

(i) (ii) (iii)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
1 F,10,E1,E2,F0	0.010FEF 0F,10,EF,F0,FE	2 1E,20,D1,D3,EF	0.021FDE 1F,21,DE,E0,FD	3 2D,30,C1,C4,EE	0.032FCD 2F,32,CD,D0,FC

(iv) (v) (vi)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
4 3C,40,B1,B5,ED	0.043FBC 3F,43,BC,C0,FB	5 4B,50,A1,A6,EC	0.054FAB 4F,54,AB,B0,FA	6 5A,60,91,97,EB	0.065F9A 5F,65,9A,A0,F9

(vii) (viii) (ix)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
7 69,70,81,88,EA	0.076F89 6F,76,89,90,F8	8 71,78,79,80,E9	0.087F78 78,7F,80,87,F7	9 61,6A,87,90,E8	0.098F67 67,70,8F,98,F6

(x) (xi) (xii)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
A 51,5B,96,A0,E7	0.0A9F56 56,60,9F,A9,F5	B 41,4C,A5,B0,E6	0.0BAF45 45,50,AF,BA,F4	C 31,3D,B4,C0,E5	0.0CBF34 34,4C,BF,CB,F3

(xiii) (xiv) (xv)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
D 21,2E,C3,D0,E4	0.0DCF23 23,30,CF,DC,F2	E 11,1F,D2,E0,E3	0.0EDF12 12,20,DF,ED,F1	12 1D,2F,C2,D4,DF	0.131ECE 1E,31,CE,E1,EC

(xvi) (xvii) (xviii)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
13 2C,3F,B2,C5,DE	0.142EBD 2E,42,BD,D1,EB	14 3B,4F,A2,B6,DD	0.153EAC 3E,53,AC,C1,EA	15 4A,5F,92,A7,DC	0.164E9B 4E,64,9B,B1,E9

(xix) (xx) (xxi)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
16 59,6F,82,98,DB	0.175E8A 5E,75,8A,A1,E8	17 68,72,7F,89,DA	0.186E79 6E,79,86,91,E7	18 62,77,7A,8F,D9	0.197E68 68,7E,81,97,E6

(xxii) (xxiii) (xxiv)

N	R.D	N	R.D	N	R.D
19 52,6B,86,9F,D8	0.1A8E57 57,71,8E,A8,E5	1A 42,5C,95,AF,D7	0.1B9E46 46,61,9E,B9,E4	1B 32,4D,A4,BF,D6	0.1CAE35 35,51,AE,CA,E3

(xxv)		(xxvi)		(xxvii)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
1C 22,3E,B3,CF,D5	0.1DBE24 24,41,BE,DB,E2	23 2B,4E,A3,C6,CE	0.252DAD 2D,52,AD,D2,DA	24 3A,5E,93,B7,CD	0.263D9C 3D,63,9C,C2,D9

(xxviii)		(xxix)		(xxx)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
25 49,6E,83,A8,CC	0.274D8B 4D,74,8B,B2,D8	26 58,73,7E,99,CB	0.285D7A 5D,7A,85,A2,D7	27 63,67,8A,8E,CA	0.296D69 69,6D,92,96,D6

(xxxi)		(xxxii)		(xxxiii)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
28 53,76,7B,9E,C9	0.2A7D58 58,7D,82,A7,D5	29 43,6C,85,AE,C8	0.2B8D47 47,72,8D,B8,D4	2A 33,5D,94,BE,C7	0.2C9D36 36,62,9D,C9,D3

(xxxiv)		(xxxv)		(xxxxvi)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
34 39,6D,84,B8,BD	0.373C8C 3C,73,8C,C3,C8	35 48,74,7D,A9,BC	0.384C7B 4C,7B,84,B3,C7	36 57,64,8D,9A,BB	0.395C6A 5C,6A,95,A3,C6

(xxxvii)		(xxxviii)		(xxxix)	
N	R.D	N	R.D	N	R.D
37 54,66,8B,9D,BA	0.3A6C59 59,6C,93,A6,C5	38 44,75,7C,AD,B9	0.3B7C48 48,7C,83,B7,C4	45 47,65,8C,AA,AC	0.494B6B 4B,6B,94,B4,B6

(xxxx)	
N	R.D
46 55,56,9B,9C,AB	0.4A5B5A 5A,5B,A4,A5,B5

सारणी 17 से स्पष्ट है कि भाजक 11 के लिए, सभी संभव अंशों (भाजक से कम) में आवर्त दशमलव के मान 2 अंकों में प्राप्त होता है। सारणी 18-19 से भाजक 21 के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों B, 16 को छोड़कर 6 सैट में 5 अंकों में मिलते हैं। सारणी 18(1)से अंशों 4, 10, 19, 1F के आवर्त दशमलव, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 1, 7, C, F हैं। सारणी 18(ii) से अंशों 8, 11, 1D, 20 के आवर्त दशमलव, अंश 2 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 3, 8, E, C हैं। सारणी 18(iii) से अंशों 9, C, F, 1B के आवर्त दशमलव, अंश 3 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 4, 5, 7, D हैं। सारणी 18(iv) से अंशों E, 14, 17, 1A के आवर्त दशमलव, अंश 5 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 6, 9, B, C हैं। सारणी 18(v) से अंशों 12, 15, 18, 1E के आवर्त दशमलव, अंश 6 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 8, A, B, E हैं। सारणी 18(vi) से अंशों A, D, 13, 1C के आवर्त दशमलव, अंश 7 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक क्रमशः 4, 6, 9, D हैं। सारणी 19 से अंशों B, 16 के आवर्त दशमलव 1 अंक में प्राप्त होते हैं, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। सारणी 20-21 से स्पष्ट है कि भाजक 31 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 2 सैट 21 अंकों में एवं 2 सैट 3 अंकों में प्राप्त होता है। सारणी 20(i) से अंशों 2, 4, 8, 9, B, F, 10, 12, 16, 17, 19, 1D, 1E, 20, 24, 25, 27, 2B, 2C, 2E के आवर्त दशमल, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 20(ii) से अंशों 5, 6, A, C, D, 11, 13, 14, 18, 1A, 1B, 1F, 21, 22, 26, 28, 29, 2D, 2F, 30 के आवर्त दशमल, अंश 3 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 22 से भाजक 41 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों D, 1A, 27, 34 को छोड़कर, 3 अंकों में प्राप्त होता है। अंशों D, 1A, 27, 34 के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.3, 0.6, 0.9, 0.C हैं। सारणी 23-26 से स्पष्ट है कि भाजक 51 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 1B, 36 को छोड़कर, 2 सैट 27 अंकों में, 2 सैट 9 अंकों में एवं 2 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते हैं। अशों 1B, 36 में आवर्त दशमलव 1 अंक में

प्राप्त होते हैं, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। सारणी 23(i) से स्पष्ट है कि अंशों 4, 7, A, D, 10, 13, 16, 19, 1C, 1F, 22, 25, 28, 2B, 2E, 31, 34, 37, 3A, 3D, 40, 43, 46, 49, 4C, 4F के आवर्त दशमल, अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। D/51 के मान हेतु, सारणी 23(i) से देखने से अंश D पर आवर्त दशमलव का प्रारम्भिक अंक 29 मिलता है। चूकि $1/51=0.\dot{0}329161F9ADD3C0CA4587E6B74\dot{F}$
अतः $D/51=0.\dot{2}9161F9ADD3C0CA4587E6B74F0\dot{3}$ है। सारणी 23(ii) से अंशों 5, 8, B, E, 11, 14, 17, 1A, 1D, 20, 23, 26, 29, 2C, 2F, 32, 35, 38, 3B, 3E, 41, 44, 47, 4A, 4D, 50 के आवर्त दशमल, अंश 2 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंकों को दिया गया है। सारणी 24(i) से अंशों C, 15, 1E, 27, 30, 39, 42, 4B के आवर्त दशमलव, अंश 3 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक दिए गये हैं। सारणी 24(ii) से अंशों F, 18, 21, 2A, 33, 3C, 45, 4E के आवर्त दशमलव, अंश 6 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक दिए गये हैं। सारणी 25 से अंशों 24, 3F एवं 2D, 48 के आवर्त दशमलव, अंश 3 एवं 12 के आवर्त दशमलव के अंक हैं, जिनके प्रारम्भिक अंक दिए गये हैं। सारणी 27 से स्पष्ट है कि भाजक 61 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 8 सैट में 12 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 28 से स्पष्ट है कि भाजक 71 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 16 सैट में 7 अंकों में प्राप्त होते है। $1/71=0._{\bar{1}}0_{5}3_{\bar{1}}\bar{C}4_{\bar{3}}\bar{1}7\bar{1}$ से स्पष्ट है कि अंशों 10, 31, 1C एवं 4, 7, 53 के पूरक अर्थात 71-4=6D, 71-7=6A, 71-53=1E के आवर्त दशमलव 1/71 से प्राप्त होते हैं, केवल अंकों का क्रम बदल जाते हैं। स्पष्ट है कि अंशों 10, 1C, 1E, 31, 6A, 6D के आवर्त दशमल अंश 1 के आवर्त दशमलव के अंक हैं। सारणी 28(i) में अंश 1 के आवर्त दशमलव का मान 7 अंक में दिया है एवं इसके संगत 6 अंशों (10, 1C, 1E, 31, 6A, 6D) के आवर्त दशमलव के प्रारम्भिक अंक दिये हैं। इसी प्रकार शेष 15 सैट के आवर्त दशमलव को सारणी 28(i)-28(xvi) में दिया है। सारणी 29 में भाजकों 81, 91, A1, B1, C1 एवं D1 के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान दिये गये हैं। भाजक 81 के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव का मान अंशों 2B, 56 को छोड़कर 18 सैट में 7 अंकों में प्राप्त होते हैं। अंशों 2B, 56 के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। भाजक 91 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 1D, 3A, 57, 74 को छोड़कर 20 सैट में 7 अंक में प्राप्त होते है। अंशों 1D, 3A, 57, 74 के आवर्त दशमलव में 1 अंक मिलता है, जिनके मान क्रमशः 0.3, 0.6, 0.9, 0.C हैं। भाजक A1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 4 सैट 33 अंकों में, 2 सैट 11 अंकों में एवं 2 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते है। भाजक B1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों 3B, 76 को छोड़कर, 6 सैट 29 अंकों में प्राप्त होते है। अंशों 3B, 76 के आवर्त दशमलव 1 अंक में प्राप्त होते हैं, जिनके मान क्रमशः 0.5, 0.A हैं। भाजक C1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 8 सैट में 24 अंकों में प्राप्त होते है। भाजक D1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 4 सैट 45 अंकों में, 2 सैट 9 अंकों में एवं 2 सैट 5 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 30-33 से स्पष्ट है कि भाजक E1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान अंशों F, 1E, 2D, 3C, 4B, 5A, 69, 78, 87, 96, A5, B4, C3 एवं D2 को छोड़कर 8 सैट 15 अंकों में, 12 सैट 5 अंकों में एवं 10 सैट 3 अंकों में प्राप्त होते है। सारणी 34(i)-34(xxxx) से स्पष्ट है कि भाजक F1 के लिए सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव के मान 40 सैट में 6 अंकों में प्राप्त होते हैं।

9.4 हर का इकाई अंक अन्य अंक हो :
(If Last Digit of Denominator is any other Digit)

हर का इकाई अंक अन्य अंक होने पर, भिन्न कों किसी अंक से गुणा या भाग करके रुपान्तरित भिन्न प्राप्त करते हैं जिसके हर का इकाई अंक सर्वोच्च या 1 हो जाए।

उदाहंरण (3) (च) X= 16, भिन्न = 21 / 1555 (छ) X= 16, भिन्न =13/25
(ज) X=8, भिन्न =4/15
हलः (च) X= 16, भिन्न = 21 / 1555, रुपान्तरित भिन्न = 21x3 /(1555x3) = 63 /3FFF
प्राचल =3FFF +1 =4000 अर्थात 4, शून्यों की संख्या = 3 , दायां अंक = 063 ,
$21/1555 = 0.\dot{0}18C06\dot{3}$
(छ) X= 16 ,भिन्न =13/25, रुपान्तरित भिन्न = 13x3 /25x3 = 39 / 6F ,
प्राचल =6F +1 =70, अर्थात 7
शून्यों की संख्या = 1, दाया अंक = ${}_{3}9$
$13/25 = 0.{}_{1}\dot{8}\ {}_{3}3\ {}_{2}7\ {}_{4}5\ {}_{6}9\ F\ {}_{1}2\ {}_{4}2\ {}_{3}\dot{9}$
$= 0.\dot{8}3759F22\dot{9}$
(ज) X=8, भिन्न =4/15,
रुपान्तरित भिन्न = 4 x3/15 x3 =14/47, प्राचल = 47+1 = 50 अर्थात 5
शून्यों की संख्या = 1, दायां अंक = ${}_{1}4$
$4/15=14/47 = 0.{}_{2}2\ {}_{3}3\ {}_{2}5\ {}_{1}4 = 0.\dot{2}35\dot{4}$

9.5 निष्कर्ष (Conclusion) :

पूर्वोक्त प्रकरणों से स्वयंसिद्ध है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के उपयोग से आवर्त दशमलव ज्ञात करने में बहुत सरलता होती है। सारणी 1-16 से निष्कर्ष निकलता है कि षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, 8F, 9F, AF, BF, CF, DF एवं EF के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना में अधिकतम 5, 23, 3, 39, 9, 9, 7, 15, 13, 15, 95, 33, 37 एवं 119 अकों में आवर्त दशमलव प्राप्त होते हैं। सारणी 17-34 से निष्कर्ष निकलता है कि षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, A1, B1, C1, D1, E1 एवं F1 के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना में अधिकतम 2, 5, 21, 3, 27, 12, 7, 7, 7, 33, 29, 24, 45, 15 एवं 6 अकों में आवर्त दशमलव प्राप्त होते हैं।

9.6 संदर्भ ग्रन्थ (References) :

{1} वैदिक गणित निर्देशिका, विद्या भारती प्रकाशन, कुरुक्षेत्र (2000)

{2} T.S.Bhanumurthy, A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics, Willey Eastern Limited, Delhi (1992)

{3} B.K.Tirth, Vedic Mathematics, Motilal Banarsi Das, Delhi (1995)

{4} S.K.Kapoor, Vedic Geometry, Arya Book Depot, New Delhi (1994)

{5} Issues in Vedic Mathematics (Proceedings) Motilal Banarsi Das, New Delhi (1991)

{6} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिकगणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124 ।

{7} Kailash & A.K.Sharma, Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.

{8} Kailash & A.K.Sharma, Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No.3, March 2005, pp. 17-19.

{9} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344 ।

{10} ए0 के0 शर्मा, एस0 के0 श्रीवास्तव एवं कैलाश, संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348 ।

{11} कैलाश एवं अमित कुमार शर्मा, संख्याओं के घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 10-21.

{12} Kailash, Divisibility and Recurring Decimals, CSI Comm. (Computer Society of India), Mumbai, Vol. 19, No.4, Oct. 1995, pp. 11-14, 33.

{13} K.M.Raju & Kailash, Developments in Mathematical Sciences in Ancient India, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 32, Aug. 2007, pp. 7-12.

{14} Kailash & A.K.Sharma, Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

{15} Kailash, Divisibility (Decimal system) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, July 1995, pp. 28-32.

{16} Kailash, Fast Evaluation of Recurring Decimals (Decimal System) School Science (NCERT), New Delhi, Vol. 33, Sept. 1995, pp. 50-54.

{17} A. K. Sharma, Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No. 1-2, April-Sep. 2005, pp. 77-79.

{18} Kailash & A.K.Sharma, Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.

अध्याय दस

उपसंहार
(Conclusion)

प्रकाशन (Publication)

- भारतीय काल गणना, ज्योतिष एवं वास्तु, अक्टूबर 06, पृ0 34–38।
- वेदों में गणित, ज्योतिष एवं वास्तु, फरवरी 07, पृ0 54–56।
- भारतीय वांगमय में कूटांक, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 340–344।
- षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।
- संख्याओं की घातें, विभाजनीयता एवं आवर्त दशमलव, Proceedings, विश्व वेद विज्ञान सत्रम, बंगलौर, अगस्त 2004, पृ0 345–348।
- Divisibility, Science India, Cochin, Vol. 8, No. 3, March 2005, pp. 17-19.
- Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Vol. 22, Feb. 2005, pp. 17-21.
- संख्याओं की घात, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 10-21.
- Squaring in Hexadecimal Number System, राजस्थान बोर्ड शिक्षण पत्रिका, अजमेर, Vol. 46-47, No 1,2, April-Sep.2005, pp. 77-79.
- Recurring Decimals in Hexadecimal, Proceedings, National Seminar on Bharatiya Heritage in Engineering and Technology, Bangalore, May 06, pp. 342-351.
- Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik, Sampda, Nagpur Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.
- प्राचीन भारतीय वाङ्मय में शब्द कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, जून 2007, पृ0101–103।
- प्राचीन भारतीय वाङ्मय में व्यंजन कूटांक, ज्योतिष एवं वास्तु, जयपुर, अगस्त 2007, पृ0 88–89।
- पूर्णघात संख्याओं के मूल, Proceedings, Bhaskariyam-Bharatimam-Dhanvatariyam, Dec. 2006, Bangalore, pp.58-64.
- वैदिक गणित : भाग संकिया (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

उपसंहार (Conclusion):

पूर्वोक्त प्रकरणों से स्वयंसिद्ध है कि प्राणिमात्र के सर्वतोन्मुखी विकास हेतु जिस भी ज्ञान की आवश्यकता है, वह सब पूर्णरूपेण वेदों में उपलब्ध है। वेदों में शरीर रचना विज्ञान, आरोग्य शास्त्र, शल्य चिकित्सा विज्ञान, धनुर्विज्ञान, सैन्य विज्ञान, संगीत शास्त्र, अभियांत्रिकी एवं स्थापत्य कला आदि के प्रचुर प्रमाण प्राप्त होते हैं। प्रत्येक शास्त्र का उद्देश्य है: व्यष्टि सत्ता का उत्तरोत्तर विकास कर, समष्टि का चिन्तन करते हुये सृष्टि का रक्षा कवच बन परमेष्टि का साक्षात्कार। प्रत्येक विज्ञान की मेरूदण्ड है गणित। ज्ञान विज्ञान के मेरूदण्ड 'गणित' का सम्यक् विचार करने पर स्पष्ट होता है कि हमारे देश के ऋषियों का गणित श्रेष्ठ था, यह सर्वमान्य एवं अकाट्य तथ्य है। विविध प्रकरणों यथा – शून्य, अंक, दशगुणोत्तरी संख्या, क्रमागत संख्या, भिन्नात्मक संख्या, अनन्त के अंतर्गत वेदों में उपलब्ध गणितीय ज्ञान से स्पष्ट होता है कि भारतीय मनीषी सिद्धहस्त गणितज्ञ थे। अपने पूर्वजों ने जिन भी सद्ग्रन्थों की रचना की है, अपने उन ग्रन्थों मे उस समय की ग्रह स्थिति की भली भांति वर्णन किया है। अतः उनके रचनाकाल एवं ऋषियों की आयु का सम्यक् विचार किया जाना अत्यावश्यक है, जिससे उनकी प्राचीनता की पुष्टि की जा सकेगी। मन्वविद इस प्रकार की घड़ी का निर्माण कर सकते हैं जिसमें तिथियां एवं ग्रहों की सद्यःस्थिति देखी जा सके जिससे अनेकों समस्याओं का समाधान सम्भव हो सकेगा। भारतीय काल गणना पंचमण्डलों (चन्द्र, पृथ्वी, सूर्य, परमेष्टि एवं स्वायम्भुव) एवं सौर परिवार के ग्रहों की गतियों के सूक्ष्म प्रेषणों एवं प्रतिक्षण होने वाले परिवर्तनों के आधार अर्थात ठोस वैज्ञानिक धरातल पर आधारित है जबकि ईस्वी सन की काल गणना केवल पृथ्वी द्वारा सूर्य की परिक्रमा में लगने वाले समय पर आधारित है अन्य ग्रहों की गतियों का उसमें कोई विचार नहीं किया गया है। हमारे पूर्वज श्रेष्ठ एवं उच्चकोटि के गणितज्ञ थे तथा सामान्य जन को सुलभ भाषा में गणित को प्रस्तुत करते थे। शब्द कूटांक द्वारा व्यक्त संख्या सर्वसाधारण व्यक्ति कंठस्थ कर सकता है। गणितज्ञों, वैज्ञानिकों एवं ज्यौतिषियों की दृष्टि से व्यंजन कूटांक अत्यंत उपयोगी हैं। संगणक वैज्ञानिकों के लिये वर्ण कूटांक अमूल्य धरोहर है, जिसकी उपादेयता प्रयत्नों की पराकाष्ठा से स्वयं सिद्ध है। प्राचीन भारत के पास समय के इतने सूक्ष्म विभागों के नापने के उपकरण होने की संभावना नहीं है। ये विभाग पूर्णतः सैद्धान्ति हैं और इनका विकास दार्शिनिक कारणों से हुआ। इससे वाणिज्य की प्रगति तथा वाणिज्य संबंधी गणित की उत्पत्ति का पता चलता है। संगणक विज्ञान में प्रयुक्त द्विअंकीय प्रणाली के साक्ष्य भी शास्त्रों में मिलते हैं।

पूर्वोक्त प्रकरणों से स्वयंसिद्ध है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों का प्रयोग संगणक विज्ञान में प्रयुक्त अंक प्रणालियों यथा द्विअंकीय, चर्तुअंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडशअंकीय में भी किया जा सकता है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों का प्रयोग से योग एवं घटाना की संक्रियाएं अत्यन्त सरल, सुस्पष्ट हो जाती हैं। घटाने की संकिया में योग विधि में 'परावर्त्य योजयेत्' सूत्र का उपयोग करके दूसरी संख्या के सभी अंकों को परावर्त्य करके (रेखांक करके) प्रत्येक स्थान के अंकों पर जोड़ने की संकिया 'एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र से सरलता से की जाती है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के प्रयोग से गुणन संकिया अत्यन्त सरल, सुस्पष्ट हो जाती हैं। समान आधार संख्या से विचलन विधि एवं समान आधार संख्या से विचलन विधि में जितनी संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना होता है, गुणनफल में उतने ही भाग होते हैं। उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि में किसी भी प्रकार की संख्याओं का गुणन संभव है। मिश्रित गुणन में विभिन्न अंक प्रणालियों की संख्याओं को एक साथ लेकर गुणा, जोड़ एवं घटाने की संकिया करते हुये किसी विशेष अंक प्रणाली में परिणाम अत्यल्प क्रियापदों की संख्या में निकाला जा सकता है। पूर्वाक्त विवेचना से स्पष्ट है कि वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के प्रयोग संख्याओं की घातें ज्ञात करने में भी किए जा सकते हैं। आनुरुप्येण विधि में 'आनुरूप्येण' उपसूत्र का प्रयोग करके किसी भी प्रकार की संख्या की घातें ज्ञात की जा सकती हैं। चतुष्अंकीय प्रणाली में अंकों के घन पर, अष्टअंकीय प्रणाली में अंकों के सप्तम घात पर एवं षोडश अंकीय प्रणाली में अंकों के पंचम घात पर बीजांकों की पुनरावृत्ति होती है। द्विअंकीय, चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणालियों के आधार (X=10) की घातें दाशमिक प्रणाली की तरह प्राप्त होतीं हैं। भाग संक्रिया की गणना में भाजक के आधार संख्या के निकट होने पर विचलन विधि का उपयोग महत्वपूर्ण हैं, इस विधि में भाज्य का प्रथम अंक भागफल का प्रथम अंक होता है। भाजक की आधार संख्या से प्राप्त विचलन को विपरीत चिन्हांकित करके संशोधन गुणक प्राप्त होता है, जो गणना में महत्वपूर्ण कार्य करता है। उर्ध्वतिर्यक एवं ध्वजांक विधि द्वारा किसी भी प्रकार की भाग संकिया की जा सकती है। भाजक की आधार संख्या ज्ञात होने पर इसे भाजक से विभाजित करने से भागफल संशोधित भाजक एवं शेषफल ध्वजांक कहलाता है। ध्वजांक द्वन्द्वयोग में सहायक होता है। संशोधित भाजक से वास्तविक भाज्य को विभाजित करते हुए भाग संक्रिया पूरी की जाती है। भाज्य का प्रथम अंक सकल भाज्य एवं वास्तविक भाज्य होता है। चतुष्अंकीय एवं अष्टअंकीय प्रणाली में पूर्णवर्ग संख्याओं के चरमांक 1 होने पर वर्गमूल के चरमांक में विषम अंक प्राप्त होता है। षोडश अंकीय प्रणाली में प्रणाली में पूर्णवर्ग संख्या का चरमांक 1 होने पर वर्गमूल का चरमांक 1 या 1 का परममित्र अंक अर्थात F, 7 या 7 परममित्र अंक अर्थात 9 होता है। चतुष्अंकीय, अष्टअंकीय एवं षोडश अंकीय प्रणाली में पूर्णघन

संख्याओं के चरमांक (1,3), (1,3,5,7) एवं (1,7,9,F) होने पर घनमूल के चरमांकों की पुनरावृत्ति होती है। षोडश अंकीय प्रणाली में पूर्ण चतुर्थघात संख्या का चरमांक 1 होने पर चतुर्थमूल के चरमांक में विषम अंक प्राप्त होता है एवं पूर्ण पंचमघात संख्या का चरमांक विषम अंक होने पर पंचममूल के चरमांक में पुनरावृत्ति होती है। संख्याओं की विभाजनीयता भी आसानी से ज्ञात की जा सकती है। यह ज्ञात हाने पर कि संख्या दिये गये भाजक से पूर्णता विभाजित है, भागफल भी आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों के उपयोग से आवर्त दशमलव ज्ञात करने में बहुत सरलता होती है। षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F, 8F, 9F, AF, BF, CF, DF एवं EF के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना से स्पष्ट है कि इनके आवर्त दशमलव में अधिकतम 5, 23, 3, 39, 9, 9, 7, 15, 13, 15, 95, 33, 37 एवं 119 अकों में आवर्त दशमलव प्राप्त होते हैं। षोडश अंकीय प्रणाली में भाजकों 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, A1, B1, C1, D1, E1 एवं F1 के सभी संभव अंशों पर आवर्त दशमलव की गणना में अधिकतम 2, 5, 21, 3, 27, 12, 7, 7, 7, 33, 29, 24, 45, 15 एवं 6 अकों में आवर्त दशमलव प्राप्त होते हैं।

वास्तव में वैदिक गणित के सूत्र गणनाओं के लिये सहज एवं सशक्त विकल्प प्रस्तुत करते हैं। गणनाओं की गति एवं परिणाम की शुद्धता में आशातीत वृद्धि होती है। गणनाओं की जटिलता घट जाती है एवं क्रियापदों की संख्या भी अत्यल्प हो जाती है। सर्वथा प्रयुक्त परीक्षण पद्धति के कारण गणनाओं में रोचकता बढ़ जाती है। उपर्युक्त विवेचन से सुस्पष्ट है कि एतद दृष्टया तंत्रजाल एवं आज्ञावलि विकसित करने पर संगणकीय समय की गई गुना बचत की जा सकती है तथा उसकी क्षमता को अनेकों गुना बढ़ाया जा सकता है।

पूर्वोक्त विवेचन से सुस्पष्ट है कि विश्व के प्राचीनतम ग्रन्थ वेदों के प्रमाणों से स्वतः सिद्ध होता है कि भारतीय मनीषी सिद्धहस्त गणितज्ञ थे। जिस राष्ट्र का गणित इतना उत्कृष्ट होगा उसके विज्ञान के सर्वोत्कृष्टता की केवल कल्पना ही की जा सकती है। वर्तमान परिप्रेक्ष्य में वेदों का सर्वांगपूर्ण अध्यवसाय करके संस्कृतज्ञों, व्याकरणाचार्यो, गणितज्ञों, वैज्ञानिकों, मनीषियों को एक साथ बैठकर राष्ट्रानुकूल समाज रचना कर सृष्टि को पोषक विज्ञान का सृजन करना होगा।

परिशिष्ट
(Appendices)

प्रकाशन (Publication)

- षोडश अंकीय प्रणाली में गुणन एवं वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की उपादेयता, भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका, नई दिल्ली, वर्ष 12, जून 2004, पृ0119–124।
- Fast Evaluation of Recurring Decimals, Bharatiya Bouddhik Sampda, Nagpur, Feb. 2005, pp. 17-21.
- Vedic Mathematics: Multiplication, Bharatiya Bouddhik Sampada, Nagpur, Vol. 31, May 2007, pp. 24-32.

परिशिष्ट (1) गिनती (Counts)

परिशिष्ट (2) अंकों का योगफल एवं अन्तरफल (Sum and difference of digits)

परिशिष्ट (3) गुणन तालिका (Multiplication Table)

परिशिष्ट (4) गुणन (Multiplication)

परिशिष्ट (5) आवर्त दशमलव (Recurring Decimals)

परिशिष्ट(1) गिनती (Counts)

दाशमिक	द्विअंकीय	चतुष्अंकीय	अष्टअंकीय	षोडश अंकीय	दाशमिक	द्विअंकीय	चतुष्अंकीय	अष्टअंकीय	षोडश अंकीय
0	0	0	0	0	51	110011	303	63	33
1	1	1	1	1	52	110100	310	64	34
2	10	2	2	2	53	110101	311	65	35
3	11	3	3	3	54	110110	312	66	36
4	100	10	4	4	55	110111	313	67	37
5	101	11	5	5	56	111000	320	70	38
6	110	12	6	6	57	111001	321	71	39
7	111	13	7	7	58	111010	322	72	3A
8	1000	20	10	8	59	111011	323	73	3B
9	1001	21	11	9	60	111100	330	74	3C
10	1010	22	12	A	61	111101	331	75	3D
11	1011	23	13	B	62	111110	332	76	3E
12	1100	30	14	C	63	111111	333	77	3F
13	1101	31	15	D	64	1000000	1000	100	40
14	1110	32	16	E	65	1000001	1001	101	41
15	1111	33	17	F	66	1000010	1002	102	42
16	10000	100	20	10	67	1000011	1003	103	43
17	10001	101	21	11	68	1000100	1010	104	44
18	10010	102	22	12	69	1000101	1011	105	45
19	10011	103	23	13	70	1000110	1012	106	46
20	10100	110	24	14	71	1000111	1013	107	47
21	10101	111	25	15	72	1001000	1020	110	48
22	10110	112	26	16	73	1001001	1021	111	49
23	10111	113	27	17	74	1001010	1022	112	4A
24	11000	120	30	18	75	1001011	1023	113	4B
25	11001	121	31	19	76	1001100	1030	114	4C
26	11010	122	32	1A	77	1001101	1031	115	4D
27	11011	123	33	1B	78	1001110	1032	116	4E
28	11100	130	34	1C	79	1001111	1033	117	4F
29	11101	131	35	1D	80	1010000	1100	120	50
30	11110	132	36	1E	81	1010001	1101	121	51
31	11111	133	37	1F	82	1010010	1102	122	52
32	100000	200	40	20	83	1010011	1103	123	53
33	100001	201	41	21	84	1010100	1110	124	54
34	100010	202	42	22	85	1010101	1111	125	55
35	100011	203	43	23	86	1010110	1112	126	56
36	100100	210	44	24	87	1010111	1113	127	57
37	100101	211	45	25	88	1011000	1120	130	58
38	100110	212	46	26	89	1011001	1121	131	59
39	100111	213	47	27	90	1011010	1122	132	5A
40	101000	220	50	28	91	1011011	1123	133	5B
41	101001	221	51	29	92	1011100	1130	134	5C
42	101010	222	52	2A	93	1011101	1131	135	5D
43	101011	223	53	2B	94	1011110	1132	136	5E
44	101100	230	54	2C	95	1011111	1133	137	5F
45	101101	231	55	2D	96	1100000	1200	140	60
46	101110	232	56	2E	97	1100001	1201	141	61
47	101111	233	57	2F	98	1100010	1202	142	62
48	110000	300	60	30	99	1100011	1203	143	63
49	110001	301	61	31	100	1100100	1210	144	64
50	110010	302	62	32					

i

परिशिष्ट(2) अंकों का योग एवं अन्तर (Addition and Subtracton of Digits)

(अ) अंकों का योगफल (Sum of digits) :

(क) द्विअंकीय प्रणाली

0	1
+1	+0̇1
1	10

(ख) चतुष्अंकीय प्रणाली

0	0	0	1	1	1	2	2	3
+1	+2	+3	+1	+2	+0̇3	+0̇2	+0̇3	+0̇3
1	2	3	2	3	10	10	11	12

(ग) अष्टअंकीय प्रणाली

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+0̇7
1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	10

2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4
+2	+3	+4	+5	+0̇6	+0̇7	+3	+4	+0̇5	+0̇6	+0̇7	+0̇4	+0̇5
4	5	6	7	10	11	6	7	10	11	12	10	11

4	4	5	5	5	6	6	7
+0̇6	+0̇7	+0̇5	+0̇6	+0̇7	+0̇6	+0̇7	+0̇7
12	13	12	13	14	14	15	16

(घ) षोडश अंकीय प्रणाली

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+A	+B	+C	+D	+E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+A	+B	+C	+D	+E
2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
+0̇F	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+A	+B	+C	+D	+0̇E
10	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
+0̇F	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+A	+B	+C	+0̇D	+0̇E
11	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11

3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
+0̇F	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+A	+B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F
12	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6
+5	+6	+7	+8	+9	+A	+0̇B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+6	+7
A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	C	D

6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
+8	+9	+0̇A	+0̇B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+7	+8	+0̇9	+0̇A	+0̇B
E	F	10	11	12	13	14	15	E	F	10	11	12

7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	9
+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇8	+0̇9	+0̇A	+0̇B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇9
13	14	15	16	10	11	12	13	14	15	16	17	12

9	9	9	9	9	9	A	A	A	A	A	A	B
+0̇A	+0̇B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇A	+0̇B	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇B
13	14	15	16	17	18	14	15	16	17	18	19	16

B	B	B	B	C	C	C	C	D	D	D
+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇C	+0̇D	+0̇E	+0̇F	+0̇D	+0̇E	+0̇F
17	18	19	1A	18	19	1A	1B	1A	1B	1C

E	E	F
+0̇E	+0̇F	+0̇F
1C	1D	1E

(ब) अंकों का अन्तर (Difference of digits)

(क) द्विअंकीय प्रणाली

0	0	1	1
-0	-0̇1	-0	-1
0	1̄1	1	0

परममित्र अंक

1 ⟶ 1

(ख) चतुष्अंकीय प्रणाली

0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
-0	-0̇1	-0̇2	-0̇3	-0	-1	-0̇2	-0̇3	-0	-1	-2	-0̇3	-0	-1	-2	-3
0	1̄3	1̄2	1̄1	1	0	1̄3	1̄2	2	1	0	1̄3	3	2	1	0

(ग) अष्टअंकीय प्रणाली

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
-0	-0̇1	-0̇2	-0̇3	-0̇4	-0̇5	-0̇6	-0̇7	-0	-1	-0̇2	-0̇3	-0̇4	-0̇5	-0̇6
0	1̄7	1̄6	1̄5	1̄4	1̄3	1̄2	1̄1	1	0	1̄7	1̄6	1̄5	1̄4	1̄3

1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
-0̇7	-0	-1	-2	-0̇3	-0̇4	-0̇5	-0̇6	-0̇7	-0	-1	-2	-3	-0̇4	-0̇5
1̄2	2	1	0	1̄7	1̄6	1̄5	1̄4	1̄3	3	2	1	0	1̄7	1̄6

3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-0	-1	-2	-3	-4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-0	-1	-2	-3	-4
$\bar{1}$5	$\bar{1}$4	4	3	2	1	0	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	$\bar{1}$5	5	4	3	2	1

5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
-5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-$\dot{0}$7	-0	-1	-2	-3
0	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$7	7	6	5	4

7	7	7	7
-4	-5	-6	-7
3	2	1	0

(घ) षोडश अंकीय प्रणाली

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0	-$\dot{0}$1	-$\dot{0}$2	-$\dot{0}$3	-$\dot{0}$4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E
0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	$\bar{1}$5	$\bar{1}$4	$\bar{1}$3	$\bar{1}$2

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-$\dot{0}$F	-0	-1	-$\dot{0}$2	-$\dot{0}$3	-$\dot{0}$4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D
$\bar{1}$1	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	$\bar{1}$5	$\bar{1}$4

1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-$\dot{0}$3	-$\dot{0}$4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C
$\bar{1}$3	$\bar{1}$2	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6

2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-$\dot{0}$4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B
$\bar{1}$5	$\bar{1}$4	$\bar{1}$3	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8

3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-$\dot{0}$5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A
$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	$\bar{1}$5	$\bar{1}$4	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A

4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-$\dot{0}$6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9
$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	$\bar{1}$5	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C

5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6
-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-$\dot{0}$7	-$\dot{0}$8
$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	$\bar{1}$6	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E

6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7
-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	$\bar{1}$7	7	6	5	4	3	2	1	0

7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8
-$\dot{0}$8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	$\bar{1}$8	8	7	6	5	4	3	2

8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
-7	-8	-$\dot{0}$9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4	-5
1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	$\bar{1}$9	9	8	7	6	5	4

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	A	A	A	A	A
-6	-7	-8	-9	-$\dot{0}$A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	$\bar{1}$A	A	9	8	7	6

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B
-5	-6	-7	-8	-9	-A	-$\dot{0}$B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2	-3
5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	$\bar{1}$B	B	A	9	8

B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C
-4	-5	-6	-7	-8	-9	-A	-B	-$\dot{0}$C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1	-2
7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	$\bar{1}$C	C	B	A

C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	D	D
-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-A	-B	-C	-$\dot{0}$D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0	-1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	$\bar{1}$D	D	C

D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	E
-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-A	-B	-C	-D	-$\dot{0}$E	-$\dot{0}$F	-0
B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	$\bar{1}$E	E

E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	F
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-A	-B	-C	-D	-E	-$\dot{0}$F	-0
D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$F	F

F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-A	-B	-C	-D	-E	-F
E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

परिशिष्ट(3) गुणन तालिकायें (Multiplication Tables)

(क) द्विअंकीय प्रणाली

1	2
2	10

(ख) चतुष्अंकीय प्रणाली

1	1	2	3	10
2	2	10	12	20
3	3	12	21	30
4	10	20	30	100

(ग) अष्टअंकीय प्रणाली

1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	4	6	10	12	14	16	20
3	3	6	11	14	17	22	25	30
4	4	10	14	20	24	30	34	40
5	5	12	17	24	31	36	43	50
6	6	14	22	30	36	44	52	60
7	7	16	25	34	43	52	61	70
8	10	20	30	40	50	60	70	100

(घ) षोडश अंकीय प्रणाली

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	20
3	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D	30
4	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C	40
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B	50
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A	60
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69	70
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87	90
10	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96	A0
11	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5	B0
12	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4	C0
13	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3	D0
14	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2	E0
15	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1	F0
16	10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	C0	D0	E0	F0	100

परिशिष्ट(4) गुणन (Multiplication) :

(क) आधार $=x$, आधार संख्या $= x^{r}$, शून्यों की संख्या $=r$, विचलन $=a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$

$$(x^{r}+a_1)(x^{r}+a_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x^{r}+a_n)$$

$$= x^{r(n-1)}\,(x^{r}+\sum_{s=1}^{n} a_s) + x^{r(n-2)}\,(\sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq t}}^{n} a_s a_t) + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$$

$$\text{गुणन} = (x^{r}+\sum_{s=1}^{n} a_s) \Big| \sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq t}}^{n} a_s a_t \Big| \ldots\ldots\ldots\ldots \Big| \prod_{s=1}^{n} a_s$$

(ख) आधार $=x$, $= p\,x^{r}$, उपाधार संख्या $= x^{r}$, शून्यों की संख्या $=r$,
अनुपात $=p$, विचलन $=a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$

$$(p\,x^{r}+a_1)\quad(p\,x^{r}+a_2)\qquad\qquad(p\,x^{r}+a_n)$$

$$= p^{n-1}\,x^{r(n-1)}\,(p\,x^{r}+\sum_{s=1}^{n} a_s) + p^{n-2}\,x^{r(n-2)}\,(\sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq t}}^{n} a_s a_t) + \ldots\ldots\ldots + a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$$

गुणन = $p^{n-1}(p\,x^{r} + \sum_{s=1}^{n} a_s \;)\Big|\; \sum_{\substack{s,t=1 \\ s\neq t}}^{n} a_s a_t \Big|\; \dots\dots\dots \Big|\prod_{s=1}^{n} a_s$

(ग) $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_1 x + a_0)(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots b_1 x + b_0)$
$= (a_n b_n) x^{2n} + (a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n) x^{2n-1} + \dots\dots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0$

गुणन = $a_n b_n \;|\; a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n \;| \dots\dots\dots \;|\; a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \;|\; a_1 b_0 + a_0 b_1 \;|\; a_0 b_0$

परिशिष्ट (5) अंकों की घातें (Powers of Digits) :

(अ) वर्ग (Square) :

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	10
वर्ग संख्या	1	10	21	100
बीजांक	1	1	3	1

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
वर्गसंख्या	1	4	11	20	31	44	61	100
बीजांक	1	4	2	2	4	1	7	1

(ग) षोडश अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
वर्गसंख्या	1	4	9	10	19	24	31	40	51	64	79	90	A9	C4	E1	100
बीजांक	1	4	9	1	A	6	4	4	6	A	1	9	4	1	F	1

(ब) घन (Cube) :

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	10
घनसंख्या	1	20	123	1000
बीजांक	1	2	3	1

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
घनसंख्या	1	10	33	100	175	330	527	1000
बीजांक	1	1	6	1	6	6	7	1

(ग) षोडश अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
घनसंख्या	1	8	1B	40	7D	D8	157	200	2D9	3E8	533	6C0	895	AB8	D2F	10
बीजांक	1	8	C	4	5	6	D	2	9	A	B	3	7	E	F	1

(स) चतुर्थघात (Fourth Power) :

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	10
घनसंख्या	1	100	1101	10000
बीजांक	1	1	3	1

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
घनसंख्या	1	20	121	400	1161	2420	4541	10000
बीजांक	1	2	4	4	2	1	7	1

(ग) षोडश अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
चतुर्थघात	1	10	51	100	271	510	961	1000	19A1	2710	3931	5100	6F91	9610	C5C1	10000
बीजांक	1	1	6	1	A	6	1	1	6	A	1	6	1	1	F	1

(द) पंचमघात (Fifth Power) :

(क) चतुष्अंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	10
घनसंख्या	1	200	3303	100000
बीजांक	1	2	3	1

(ख) अष्टअंकीय प्रणाली :

अंक	1	2	3	4	5	6	7	10
घनसंख्या	1	40	363	2000	6065	17140	40647	100000
बीजांक	1	4	5	2	3	6	7	1

(ग) षोडश अंकीय प्रणाली :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
	1	20	F3	400	C35	1E60	41A7	8000	E6A9	186A0	2751B	3CC00	5AA5D	834E0	B964F	100000
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	1

परिशिष्ट (5) आवर्त दशमलव (Recurring Decimals) :

(क)

$$\frac{p}{ax^n-1} = \ldots + \frac{p}{ax^n} + \frac{p}{a^2x^{2n}} + \ldots + \frac{p}{a^{r-1}x^{nr-n}} + \frac{p}{a^r x^{nr}} \ldots$$

माना $\frac{p}{a^r x^{nr}} = p$ = दायाँ भाग

अतः $\frac{p}{a^{r-1} x^{nr-r}} = \frac{p\,(ax) =}{a^r x^{nr}}$ pa = बायाँ भाग

जहाँ a = प्राचल, n = शून्यों की संख्या , p = दायाँ भाग

अतः $\frac{p}{ax^n-1}$ = ... + (pa) a+ (pa) + p

(ख)

$$\frac{p}{ax^n+1} = \frac{p}{ax^n} - \frac{p}{a^2x^{2n}} + \frac{p}{a^3x^{3n}} - \frac{p}{a^4x^{4n}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{p}{a^r x^{nr}}$$

$$+(-1)^r \frac{p}{a^{n+1}\, x^{nr+n}} + \ldots\ldots$$

माना $(-1)^r \frac{p}{a^{r+1}\, x^{nr+n}} = \overline{p}$ = दायाँ भाग

$$(-1)^{r-1}\frac{p}{a^r x^{nr}} = \frac{(-1)^r p \;\; (+ax^n)}{a^{r+1}\, x^{nr+n}-1} = \overline{pa}$$ = बॉया भाग

जहाँ $\overline{a}$ = प्राचल, n = शून्यों की संख्या , $\overline{p}$ = दायाँ भाग

$$p = \frac{}{ax^n+1} \; \text{--------} + (\overline{p}\ \overline{a})\overline{a} + (\overline{p}\ \overline{a}\ ) + \overline{p}$$